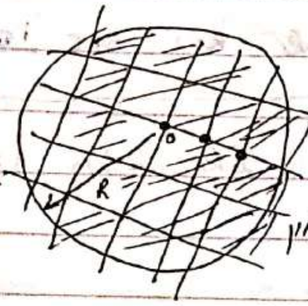
24/3/19 הרצאה 4

$L\subseteq\mathbb{C}$ - סריג, $L=\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$, $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}$ בת"ל מעל $\mathbb{R}$. $f(z)$ אליפטית - ביחס ל-L אם f מרומורפית ומחזורית ביחס ל-L.

כדי לבנות דוגמאות לפונקציות אליפטיות, נצטרך תכונה של סריגים - יהי $L\subseteq\mathbb{R}^2$ סריג. נסמן:

$$N_L(R)=\#\{\omega\in L \mid |\omega|\le R\}$$



טענה: כאשר $R\to\infty$, $N_L(R)\sim C_L\cdot R^2$, כאשר $C_L=\frac{\pi}{area(D_L)}$ עבור D_L מקבילון יסודי עבור L.

הוכחה: סביב כל נקודת סריג ω נשים - $\omega+D_L$ - הזזה של המקבילון היסודי, ונסמן $P=\bigcup_{|\omega|\le R}(\omega+D_L)$. זהו פוליגון. אזי,

$$area(P)=\sum_{|\omega|\le R} area(\omega+D_L) = N_L(R)\cdot area(D)$$

$$\Rightarrow \frac{area(P)}{area(D_L)} = N_L(R).$$

מצד שני, נשים לב כי $\pi(R-2d)^2\le area(P)\le\pi(R+2d)^2$ - שכן $B_0(R-2d)\subseteq P\subseteq B_0(R+2d)$ כאשר $d=diam(D_L)$. סה"כ:

$$\pi R^2+O(R)=\pi(R-2d)^2\le N(R)\cdot area(D_L)\le\pi(R+2d)^2=\pi R^2+O(R)$$

$\Leftarrow$ סה"כ $N(R)=\frac{\pi R^2}{area(D)}R^2+O(R)$. □

מסקנה: יהי $L\subseteq\mathbb{C}$ סריג, ויהי $k>2$. אזי,

$$\sum_{0\ne\omega\in L}\frac{1}{|\omega|^k}<\infty$$

הוכחה: אכן,

$$\sum\frac{1}{|\omega|^k}=\underbrace{\sum_{|\omega|\le1}\frac{1}{|\omega|^k}}_{O(1)}+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{2^j\le|\omega|\le2^{j+1}}\frac{1}{|\omega|}\le O(1)+\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^j}\right)^k \underbrace{N_L(0,2^{j+1})}_{O((2^{j+1})^2)}\le$$

$$\le O(1)+\sum_{j\ge0}\left(\frac{1}{2^j}\right)^{k-2}<\sum_{j=0}^{\infty}\left(2^{2-k}\right)^j+O(1)<\infty$$ □

הגדרה: $L\subseteq\mathbb{C}$ סריג, $k>2$, שלם, נגדיר -

$$f_k(z)=\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z-\omega)^k}$$

טענה: הסכום $f_k(z)$ מתכנס בהחלט ומקומית במ"ש, ב-$\mathbb{C}-L$.

הוכחה: יהי $z\notin L$,

$$f_k(z)=\sum_{|\omega|\le2|z|}\frac{1}{|z-\omega|^k}+\sum_{|\omega|>2|z|}\frac{1}{|z-\omega|^k}$$

אם $|\omega|>2|z|$, אזי $|\omega-z|\geq\big||\omega|-|z|\big|\geq\frac{|\omega|}{2}$

לכן:

$$\sum_{|\omega|>2|z|}\frac{1}{|z-\omega|^k}<\sum_{|\omega|>2|z|}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}|\omega|}\right)^k\underset{\text{למה}}{<}\infty$$ ∎

מסקנה: $f_k(z)$ היא הולו' ב-$\mathbb{C}-L$ עם קוטב מסדר k בנקודות L,

$$f_k(z)\underset{z\to0}{\sim}\frac{1}{z^k}+O(1)$$

טענה: עבור $k>2$, אז $f_k(z)$ אליפטית ביחס ל-L.

סיבה: הוכחה לכל $\omega_0\in L$, $f_k(z+\omega_0)=f_k(z)$. וכן:

$$f_k(z+\omega_0)=\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z+\underbrace{\omega_0-\omega}_{-(\omega-\omega_0)=\omega'})^k}=\sum_{\omega'\in L}\frac{1}{(z-\omega')^k}=f_k(z)$$ ∎

קיבלנו ש-$f_k(z)\neq0$ (כי $f_k(z)\sim\frac{1}{z^k}$ כאשר $z\to0$), אליפטית.

הגדרה: פונקציית $\wp$ של Weierstrass -

$$\wp(z;L):=\frac{1}{z^2}+\sum_{0\neq\omega\in L}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right]$$

טענה: הסכום של $\wp$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

הוכחה: כרגיל, נעריך:

$$\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right|=\left|\frac{\overbrace{\omega^2-(z-\omega)^2}^{2\omega z-z^2}}{\omega^2(z-\omega)^2}\right|\underset{|\omega|\gg1}{\ll_z}\frac{|\omega|}{|\omega|^4}=\frac{1}{|\omega|^3}$$

לכן,

$$\sum_{0\neq\omega\in L}\left|\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right|<\infty$$ ∎

מסקנה: $\wp(z;L)$ הולו' ב-$\mathbb{C}-L$, בנוסף, גם,

$$\wp(z)\underset{z\to0}{\sim}\frac{1}{z^2}$$

טענה: $\wp$ אליפטית ביחס ל-L.

הוכחה: נחשב את $\wp'$:

$$\wp'=\frac{-2}{z^3}+\sum_{0\neq\omega\in L}\frac{-2}{(z-\omega)^3}=-2\sum_{\omega\in L}\frac{1}{(z-\omega)^3}=-2f_3(z)$$

- אליפ'. לכן $\wp'$ - אליפ'. נקבע $\omega_0\in L$. אזי,

$$\wp'(z+\omega_0)-\wp'(z)=0$$

לכן, יש קבוע $C(\omega_0)$ כך ש:

$$\wp(z+\omega_0)-\wp(z)=C(\omega_0)$$

נשים לב ש- $\wp(z)$ - זוגית. לכן, אם נציב $z=-\frac{\omega_0}{2}$, נקבל:

$$\wp\left(-\frac{\omega_0}{2}+\omega_0\right)-\wp\left(-\frac{\omega_0}{2}\right)=C(\omega_0)$$

$$\Leftarrow \quad \wp\left(-\frac{\omega_0}{2}\right)-\wp\left(\frac{\omega_0}{2}\right)=C(\omega_0)$$

$$\Rightarrow \quad C(\omega_0)=0$$

$\square$

תכונות כלליות של פונקציות אליפטיות

1) לפונקציה אליפטית לא קבועה תמיד יהיו קטבים

2) f מקבלת כל ערך ב- $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$

3) כל ערך מתקבל אותו מספר של פעמים בתחום היסודי

4) מתקיים $\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} f(z)=0$

5) כתוצאה מכך, $\sum_{p_i\in D}\operatorname{Res}_{p_i} f=0$ (p_i קטבים של f)

6) נכונה כי $\sum_{f(z_i)=0} z_i-\sum_{f(z_j)=\infty} z_j\in L$.

הגדרנו ש- $\wp$ פונקציה אליפטית זוגית, מסדר $\operatorname{ord}(\wp)=2$. נאמר ש-$f(-z)=f(z)$ אם f אליפטית ולא קבועה.

משפט: (1) אם פונקציה אליפטית זוגית, היא פונקציה רציונלית ב-$\wp$.
(2) אם פונקציה אליפטית ביחס ל-L היא -

$$f=R(\wp)+\wp'\cdot S(\wp), \quad R,S\in\mathbb{C}(x)$$

(כאן, $\wp'$ אי זוגית)

פיתוח טיילור של $\wp$

אם מגדירים - $G_n(L)=\sum_{0\neq\omega\in L}\frac{1}{\omega^n}$, $n>2$. אז, $G_{2n+1}(L)=0$ שכן -

$$G_{2n+1}=\sum_{\omega\in L}\frac{1}{\omega^{2n+1}}\underset{\omega'=-\omega}{=}\sum_{\omega'\in L}\frac{1}{(-\omega')^{2n+1}}=-\sum_{\omega'\in L}\frac{1}{(\omega')^{2n+1}}=-G_{2n+1}$$

משפט: עבור $0<|z|<1$,

$$\wp(z;L)=\frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2n+2}(L)z^{2n}$$

הוכחה: נשים לב -

$$\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{\omega^2}\left[\frac{1}{(1-\frac{z}{\omega})^2}-1\right]$$

ניזכר -

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n \quad , |x|<1$$

לכן,

$$\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}=\frac{1}{\omega^2}\cdot\sum_{m\geq 1}(m+1)\left(\frac{z}{\omega}\right)^m$$

לכן,

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\neq 0}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^2}\cdot\sum_{m\geq 1}(m+1)\left(\frac{z}{\omega}\right)^m=$$

$$=\frac{1}{z^2}+\sum_{m\geq 1}(m+1)\underbrace{\left[\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^{m+2}}\right]}_{=G_{m+2}(L)}\cdot z^m$$

$\square$

המשוואה הדיפרנציאלית עבור $\wp$

נסמן: $g_2(L)=60G_4(L)$, $g_3(L)=140G_6(L)$ אז:

משפט:
$$(\wp')^2=4\wp^3-g_2\wp-g_3$$

הוכחה:
$$\wp=\frac{1}{z^2}+3G_4z^2+5G_6z^4+O(z^6)$$

$$\wp'=\frac{-2}{z^3}+6G_4z+20G_6z^3+O(z^5)$$

$$\wp'^2=\frac{4}{z^6}+2\cdot\frac{-2}{z^3}6G_4z+2\cdot\frac{-2}{z^3}20G_6z^3+O(z^2)=$$

$$=\frac{4}{z^6}-24G_4\cdot\frac{1}{z^2}-80G_6+O(z^2)$$

נחסר $4\wp^3$ כדי להיפטר מהאיבר $\frac{1}{z^6}$ - נקבל

$$(\wp')^2-4\wp^3=-60G_4\cdot\frac{1}{z^2}-140G_3+O(z^2)=-g_2\frac{1}{z^2}-g_3+O(z^2)$$

$$(\wp)^3=\frac{1}{z^6}(1+3G_4z^4+5G_6z^6+\dots)^3=$$

$$=\frac{1}{z^6}(1+3\cdot 1^2\cdot 3G_4z^4+3\cdot 1^2\cdot 5G_6z^6+O(z^8))=$$

$$=\frac{1}{z^6}+9G_4\cdot\frac{1}{z^2}+15G_6+O(z^2)$$

עכשיו נוסיף $g_2\wp$.

$$(\wp')^2-4\wp^3+g_2\wp=-g_2\cdot\frac{1}{z^2}-g_3+g_2\left(\frac{1}{z^2}+3G_4z^2+\dots\right)$$

$$=-g_3+O(z^2)$$

$$\Leftarrow\quad (\wp')^2-4\wp^3+g_2\wp-g_3=O(z^2)$$

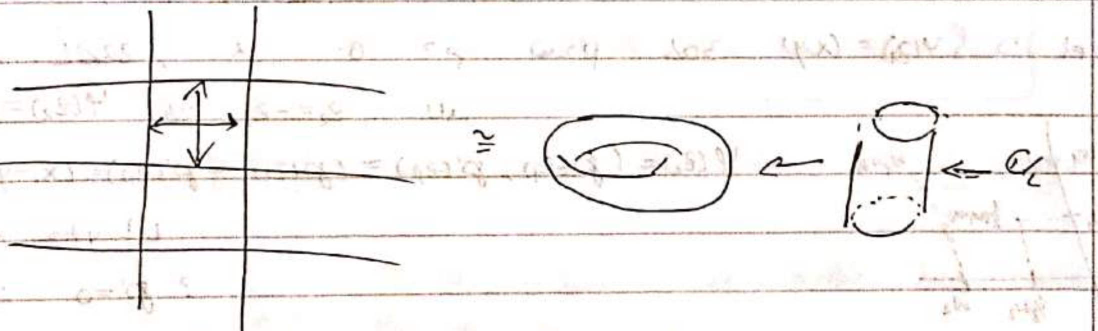
פונקציה אליפטית, גלובלית, שמתאפסת בנקודה. ולכן קבועה. וב-$z=0$ נקודה אפס, לכן שווה אפס. □

ההעתקה:

$$\mathbb{C}/L\longrightarrow E_L,\quad z+L\overset{\varphi}{\mapsto}(\wp(z),\wp'(z))$$

$$E_L=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2\mid y^2=4x^3-g_2(L)x-g_3(L)\}\cup\{\infty\}$$

משכנו את $\mathbb{C}_L$ כמו "עקום אליפטי".



בצורה פרויקטיבית:

$$\mathbb{P}^2=\{(u:v:w)\mid u,v,w\in\mathbb{C},\ \text{לא כולם אפס},\ (u,v,w)\sim(\lambda u,\lambda v,\lambda w)\}$$

נכתוב את המשוואה של E_L בצורה הומוגנית-

$$E_L=\{(X:Y:Z)\mid ZY^2=4X^3-g_2XZ^2-g_3Z^3\}\subseteq\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

$\boxed{\text{נקודה ב-}\infty\longrightarrow Z=0}$

זה משטח, ואפשר לחשב את הגנוס שלו - טורוס 1.

מהן תכונות ההעתקה לעיל?

טענה: φ היא על, חח"ע, ועוברת הסיווג $z\in\frac{1}{2}L$ (יש 4 כאלו)

הוכחה: נבחר $(x,y)\in E_L$, $y^2=4x^3-g_2x-g_3$. מכיוון ש-$\wp$ היא על, יש z כך ש-$\wp(z)=x$. y נקבע עד כדי סימן, כי $y^2=4x^3-g_2x-g_3$.

גם ℘' מקיים:

$$(\wp')^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) - g_3 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

לכן -

$$\wp' = \begin{cases} y \\ -y \end{cases}$$

אם הוא y - ניצחנו. אחרת נשים $-y$, ונקבל $\wp'(-z)=-y$, כי ℘' אי זוגית, ומשום ש-℘ זוגית, ה-x לא ישתנה. לכן -

$$\varphi(-z) = (x,y)$$

בנוסף, φ היא חד ערכית.

$$(\wp(z_1), \wp'(z_1)) = \varphi(z_1) \overset{?}{=} \varphi(z_2) = (\wp(z_2), \wp'(z_2))$$

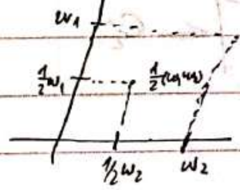
$$\Rightarrow \quad \wp(z_1) = \wp(z_2)$$

$$\wp'(z_1) = \wp'(z_2)$$

$\wp(z_1)=\wp(-z_1)$, וכמו כן, $\wp(z_1)=\wp(-z_1)$, ולכן, ℘ היא מסדר 2 ל-1. (שכן $\gamma(\wp)=2$)

לכן אם ניקח $-z_1 \neq z_1 \mod L$ אז הפתרונות היחידים - כלומר, $z_2 = z_1, -z_1$.

אם $2z \notin L$, אז יש רק פתרון אחד $\varphi(z_1)=(x,y)$, כי אם $\varphi(z_2)=(x,y)$ אזי $z_2=-z_1$, ואז,



$$\varphi(z_2) = (\wp(-z_1), \wp'(-z_1)) = (\wp(z_1), -\wp'(z_1)) = (x,-y) \neq (x,y)$$

(אם $y \neq 0$!)

מה אם $\wp'=0$?

נסמן $\wp'(z)=0 \iff 2z\in L$ אך $z \notin L$. אז -

$$\wp'(\tfrac{\omega}{2}) = \underbrace{\wp'(-\tfrac{\omega}{2}+\omega) = \wp'(-\omega/2)}_{\text{מחזורית}} \underbrace{=}_{\text{℘' אי-זוגית}} -\wp'(\omega/2)$$

גם ברור ש-$\wp'=0$ ב-$w/2$, אלא אם כן $w/2 \in L$, ואז יש קוטב.

משפט: $\varphi: \mathbb{C}/L \to E \cup \{\infty\}$ זו איזו, 1 ל-1, פרט לנקודות 2 ל-1 בחצאי המחזורים $\{\frac12 L/L - \{0\}\}$ (3 נקודות כאלו) וכן ב-$z=0=-z$, שם מקבלים לא איזו.

חוק החבורה על E

יהיו שתי נקודות $P_1, P_2 \in E$ כאשר:

$$E = \{y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3\}$$

נבחר:

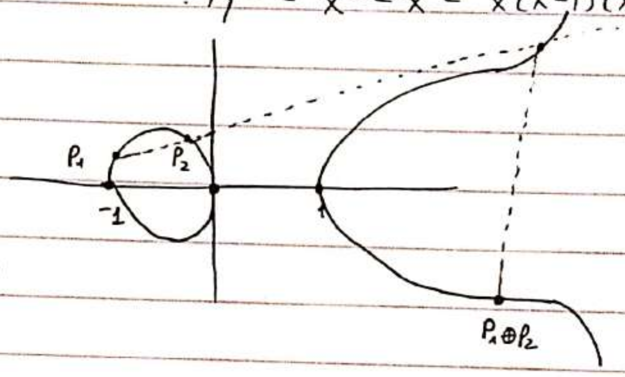
$$P_1=\varphi(z_1),\ P_2=\varphi(z_2),\quad z_i\in\mathbb{C}/L$$

<u>נזכיר</u> את החיבור,

$$P_1\oplus P_2=\varphi(z_1+z_2)\in E$$

<u>חוק החבורה בצורה גיאומטרית</u>

ניקח למשל, $4y^2=x^3-x=x(x-1)(x+1)$.



$P_1+t(P_2-P_1)$ $\mapsto$ מציבים לתוך המשוואה, מקבלים משוואה ממעלה 3 ב-t, ויודעים שני פתרונות אז אפשר למצוא את השלישי.

<u>מסקנה:</u> ① אם $P=(x,y)$, אז $-P=(x,-y)$.

② $\varphi(z_1),\ \varphi(z_2)\ -\varphi(z_1+z_2)=\varphi(-z_1-z_2)$ הן על ישר אחד.

③ האיבר הניטרלי $\varphi(0)=0_E$ הוא הנקודה באינסוף.

<u>מסקנה:</u> את חוק החבורה של E ניתן לתאר ע"י נוסחאות אלגבריות בקואורדינטות.

הנוסחה היא כדלקמן - אם $P_1=\varphi(z_1)=(x_1,y_1)$, $P_2=\varphi(z_2)=(x_2,y_2)$ "גנריים"

אז, $P_1\oplus P_2=(x_3,y_3)$ כאשר:

$$-x_3=x_1+x_2+\frac{1}{4}\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2$$

$$-y_3=y_1+(x_3-x_1)\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$