

סיכום מקבץ סקולרי 1

המקבץ הבינארי

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- בינום בינון

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

- זהויות שמשוואות

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \iff \sum_{k \text{ even}=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ odd}=0}^n \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- זהות פסקל

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$$

- הפעלה עבור $x \in \mathbb{R}$

- הפעלה עבור מופטילום - מס' הסדרות באורך $n_1 + \dots + n_k$ כאשר i מופטילום n_i פעמים:

$$\frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! \dots n_k!} = \binom{n_1 + \dots + n_k}{n_1, \dots, n_k}$$

$$(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} \cdot x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$$

- נוסחאת מופטילום

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} x^n$$

- נוסחאת הבינום הפוך

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{e \cdot n}{k}\right)^k, \quad \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$$

- הערכת המקבץ הבינארי

מספר הפתרונות למשוואות מהסוג $x_1 + \dots + x_n = k$

- מספר הפתרונות למשוואה $x_1 + \dots + x_n = k$, $x_i \geq 0$ הוא $\binom{n+k-1}{k}$

- מספר הפתרונות לאי-שוויון $x_1 + \dots + x_n \leq k$, $x_i \geq 0$ הוא $\binom{n+k}{k}$

- כאשר יש הפעלה מסוג $x_i \leq m$, ניתן להשתמש בעיקרון ההפעה וההצבה

$$\prod_{i=1}^k (\sum_{m \in S_i} x^m) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- יהיו $S_1, \dots, S_k$ קבוצות

כאשר a_n הוא מס' הפתרונות למשוואה $y_1 + \dots + y_k = n$ אם $y_i \in S_i$ $\forall i$

- כשהצבירים שמשקלים שונים, נשתמש במתקן וצורת מרחיבה במקום פונקציה וצורת רגל:

מספר קטלן

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

- מספר קטלן

- דגרים ששקלים למספר קטלן:

- מספר הסדרות האנאלוגיות באורך $2n$

- מספר ההילוכים הנו מ'מזיג' עד (n, n) שאינם חוצים את הישר $y=x$

- מספר הסדרות האנאלוגיות באורך n כאשר $0 \leq a_i \leq 1$

סיקרון ושבר היולים

- אם מכניסים $n+1$ שובכים n -ים יולים, אז בהכרח יש שבר עם לפחות 2 יולים
- אם מכניסים m יולים n -ים שובכים, אז בהכרח יש שבר עם לפחות $\lceil \frac{m}{n} \rceil$ יולים
- יהיו $A_1, \dots, A_n, B$ קבוצות עם מידה n ש- $A_i \subseteq B$ $\forall i$. אם $\sum_{i=1}^n |A_i| > n|B|$, אז קיימות $n+1$ קבוצות A_i שחיתוכן לא ריק
- משפט ארדוס-סקרט - בעל סדרה עם ממשיים שלמים באורך n^2+1 יש תת-סדרה מונוטונית באורך $n+1$

סיקרון ההפכה וההצחה

- יהיו $A_1, \dots, A_n$ קב' סופיות
- $$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i \in I} A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq [n] \\ |I|=k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$
- אם $1 \leq k \leq n$ דבר $I \subseteq [n]$ באורך $|I|=k$ מתקיים ש- $|\bigcap_{i \in I} A_i| \leq |A_1|$
- $$|\bigcup_{i=1}^n A_i| \leq \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \cdot |A_1| \cdot |\bigcap_{i \in I} A_i|$$
- $$|\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i| = |\bigcup_{i=1}^n A_i| = |S| - |\bigcup_{i=1}^n A_i| = |S| - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} |\bigcap_{i \in I} A_i| = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

הצגות אוסמטטיות

$$f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

- $f = O(g)$ אם קיים $C > 0$ ש- $f(n) \leq C \cdot g(n)$ החל מ- n מסוים
כל פורמלי - סדר הגודל של f קטן או שווה לסדר הגודל של g
- $f = \Omega(g)$ אם קיים $C > 0$ ש- $f(n) \geq C \cdot g(n)$ החל מ- n מסוים
כל פורמלי - סדר הגודל של f גדול או שווה לסדר הגודל של g

- $f = o(g)$ אם $\frac{f(n)}{g(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ כל פורמלי - סדר הגודל של f קטן ממנו מזה של g

- $f = \omega(g)$ אם $\frac{f(n)}{g(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ כל פורמלי - סדר הגודל של f גדול ממנו מזה של g

- $f = \Theta(g)$ אם $f = O(g)$ ו- $f = \Omega(g)$. כל פורמלי - סדר הגודל שווים

$$\int_m^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{i=m}^n f(i) \leq \int_{m-1}^n f(x) dx$$

$$\int_{m-1}^n f(x) dx \leq \sum_{i=m}^n f(i) \leq \int_m^{n+1} f(x) dx$$

$$n! = \Theta(\sqrt{n} \cdot (\frac{n}{e})^n)$$

- אם f מונוטונית יורדת אז

- אם f מונוטונית עולה אז

- נוסחאות סטירלינג -

נוסחאות נסיגה

- נוסחאות נסיגה ענאריות - $f(n) = c_1 f(n-1) + \dots + c_r f(n-r) + g(n)$

הנוסחא נקראת הומוגנית אם $g(n) = 0$

- פולינום אופיני של נוסחאת נסיגה - $P(x) = x^r - c_1 x^{r-1} - \dots - c_{r-1} x - c_r$

שיטת פיתרון נוסחאות נסיגה הומוגנית:

- נרשום פולינום אופיני ונסתר אותו

- נסמן את שורשי $r_1, \dots, r_k$ (נניח שכולם בריקוי 1)

- הפיתרון הכללי יהיה $f(n) = a_1 \lambda_1^n + \dots + a_r \lambda_r^n$

- נציב תנאי התחלה ונמצא את a_i המתאימים

- אם יש שורש λ בריקוי k נחליף את $a_i \lambda_i^n$ בביטוי מהצורה:
 $C_1 \lambda_1^n + C_2 n \lambda_2^n + C_3 n^2 \lambda_3^n + \dots + C_k n^{k-1} \lambda_k^n$

שיטת פיתרון נוסחאות לא הומוגניות:

- נמצא פיתרון כללי להומוגנית

- נמצא פתרון פרטי כלשהו לא הומוגנית

- נציב תנאי התחלה בסכום שלהם, ונמצא את המקדמים המתאימים

- שיטה לנחוש פיתרון פרטי כאשר $g(n) = n^t \cdot b^n$: $\hat{f}(n) = Q(n) \cdot n^m \cdot b^n$

כאשר: $Q(n)$ - פולינום ג-מ ממעלה t

m - ריבוי של b בפולינום האופיני המתאים להומוגנית (יכול להיות גם 0)

פונקציות יוצרות

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

- פונקציה יוצרת של סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ היא:

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \cdot x^n$

- פונקציה יוצרת מעריכית של סדרה $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ היא:

$\frac{1}{1-f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} f(x)^n$

- סורים שימושיים:

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

- סכום פונקציות יוצרות:
 אם נאסף פונקציות יוצרות a_n , 1 - אז פונקציה יוצרת של b_n היא:
 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = b_n$

$\frac{g(x)}{1-x}$

מכפלת פונקציות יוצרות:

- אם נאסף פונקציות יוצרות a_n , 1 - נאסף פונקציות יוצרות b_n , נאסף פונקציה יוצרת של c_n היא $(a_n \cdot b_n)$