

חוגים

הגדרה - חוג הוא קבוצה R (Ring) עם 2 פעולות: חיבור (+) וכפל ($\cdot$).
הפעולות מקיימות:

- סגור $a, b \in R$ יש $c \in R$ יחיד $a+b=c$ ו- $a \cdot b = c$
- $\forall a, b, c \in R \quad (a+b)+c = a+(b+c)$
- $\forall a, b \in R \quad b+a = a+b$
- קיים איבר יחיד 0 שמתאם 0 וקיים $a+0=a$ $\forall a \in R$
- סגור $a \in R$ קיים איבר נגדי $-a \in R$ המקיים $a+(-a)=0$
- סגור $a, b \in R$ יש $c \in R$ יחיד $a \cdot b = c$
- $\forall a, b, c \in R \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- $\forall a, b, c \in R \quad a(b+c) = ab+ac$
- $(b+c)a = ba+ca$

הגדרה - חוג הוא קבוצה עם יחידה $1 \in R$ אם יש בו איבר 1 כזה ש- $\forall a \in R. 1 \cdot a = a = a \cdot 1$

חוג R הוא חילופי אם $\forall a, b \in R. ab = ba$

חוג חילופי עם יחידה בו $0 \neq 1$ נקרא תחום שטמל א.י.
 $\forall a, b \in R. a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0$

הגדרה - יהי R חוג. חוג הפולינומים מעל R - $R[x]$ הוא קבוצת הביטויים הפולינומיים מהצורה:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad \forall a_i \in R, \quad a_i = 0 \text{ מלבד מספר סופי}$$

$$\text{חיבור: } \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$$

$$\text{כפל: } \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$

הגדרה - יהיו R, S חוגים. העתקה $\varphi: R \rightarrow S$ נקראת הומומורפיזם של חוגים אם $\forall a, b \in R. \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
אם R, S חוגים עם יחידה נדרוש גם $\varphi(1_R) = 1_S$

הערות - עבור הומומורפיזם $\varphi: R \rightarrow S$ מתקיים: $\varphi(0) = 0, \varphi(-a) = -\varphi(a)$
- הומומורפיזם חזק וזו נקרא אוטומורפיזם

למשל - נגזיר העתקת היחידה $\delta: R \rightarrow R$ - $\delta(x) = x$ (ל"ח ש- $1 \in R$)
- אם α מתחלפת בכפל עם כל המקדמים של g , אז:
 $\varphi(f \cdot g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$
 $\varphi(1) = 1$
- אם α מתחלפת עם כל איברי R אז φ הומומורפיזם
 $\varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$

למשל - יהי R חוג. נגזיר $\varphi: M_n(R[x]) \rightarrow M_n(R[x])$ ע"י

$$\varphi \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i x^i \right)_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty} (A_i)_{ij} x^i$$

הגדרה - יהי R חוג קבוצה $S \subseteq R$ נקראת תתחוג אם $0 \in S$ ו- $1 \in S$ סגורה

למשל - S היא חוג ביחס לחבור והכפל של R .

משפט - יהי R תחום שטמל אז R תת חוג של עצמו כלשהו $\mathbb{F}$

חילוק בחזקים

הבזרה - יהי R חוג עם יחידה, $a \in R$, $b \in R$ קרא חובכי של a אם $ab = 1 = ba$
 נסמן את קבוצת חובכיים ההפיכים ב- R :
 $R^* = \{a \in R \mid \exists b \in R \text{ s.t. } ab = 1 = ba\}$

משפט - יהי F שדה, $R = F[x]$
 יהי $\{q_i\}_{i=1}^m$ אוסף של הפולינומים האי-פריקים המוקנים ב- R .
 אז $\{0 \neq f \in R \mid f \text{ אינו מתחלק ב-} q_i \text{ לכל } i=1, \dots, m\}$ אינו ריק.
 ויש מספר סופי של q_i ש- f מתחלק בהם.

$$f = c \cdot \prod_{i=1}^m q_i^{m_i}$$

* באופן דומה יש פירוק יחיד לסדרים אי-פריקים ב- $R = \mathbb{Z}$

משפט - יהי $F \in R[x]$ מתקן. של f אי-פריק. אז f מתקיים אחד מהן:
 א - $F = x - a$, $a \in R$
 ב - $F = x^2 + bx + c$, $b, c \in R$ כאשר $b^2 - 4ac < 0$

הערה של גאוס - אם $F \in \mathbb{Z}[x]$ מתקן ויש $g \in \mathbb{Q}[x]$ מתקן קטן -
 אז $g \in \mathbb{Z}[x]$

סקנה - יהי $F \in \mathbb{Z}[x]$ מתקן. יהי $a \in \mathbb{Z}$ שרשו, אז $a \in \mathbb{Z}$

הבזרה - יהי f שדה, והיו $f_1, \dots, f_k \in F[x]$ של f חובכיים.
 אז פולינום מתקן $d \in F[x]$ יקרא מחלק משותף של $f_1, \dots, f_k$ אם $d \mid f_1, \dots, d \mid f_k$.
 - מחלק משותף d של $f_1, \dots, f_k$ יקרא המחלק המשותף $\gcd(f_1, \dots, f_k)$ ויסומן d .
 אם הובן מחלק בלתי משותף של $f_1, \dots, f_k$, כסומה.
 שכל d' מתקן שמתקיים $d' \mid f_1, \dots, d' \mid f_k$ מתקיים $d' \mid d$.

משפט - חילוק עם שארית
 יהי R חוג עם יחידה, והיו $f, g \in R[x]$, $b_m \in R^*$

$$g = b_m x^m + \dots + b_0$$

 אז:

א - קיימים $q, r \in R[x]$ יחידים:

$$f = qg + r$$

 $\deg r < \deg g = m$

ב - קיימים $q', r' \in R[x]$ יחידים:

$$F = q'g + r'$$

 $\deg r' < \deg g = m$

סקנה - יהי R חוג עם יחידה, יהי $\alpha \in R$ ויהי $f \in R[x]$ אז $f(\alpha) = 0$ אם ורק אם $f(x) = (x - \alpha)q(x)$ קטן -

הבזרה - יהי R חוג קומוטטיבי והיו $a, b \in R$. מחלק את b ב- R (א) אם $b = ac$ קטן -

סקנה - יהי f שדה, יהי $\alpha \in F$ ויהי $f \in F[x]$ אז f מתחלק ב- $x - \alpha$ אם ורק אם $f(\alpha) = 0$

משפט - יהי f שדה ויהי $f \in F[x]$ אז f מתחלק ב- $x - \alpha$ אם ורק אם $f(\alpha) = 0$

סקנה - יהי f שדה, יהי $f \in F[x]$ מתחלק בזו, ויהי $c \in F^*$ המקדם הראשון של f .
 נניח כי $f = c(x - a_1) \dots (x - a_n)$

למה - יהי $f_1, f_2 \in F[x]$ שניהם $\neq 0$. יהי $d = \gcd(f_1, f_2)$
 אז קיימים $g, h \in F[x]$ כך ש- $d = g f_1 + h f_2$
 הערה - הם לא יחידים!
 איך? מצויים חזרה באמצעות אוקלידס.

הערה - יהי F שדה, $f_1, \dots, f_k \in F[x]$ שונים $\neq 0$. פולינום משיקן $m \in F[x]$ יקרא
כפוף משותפת של $f_1, \dots, f_k$ אם $f_i | m$ $\forall i$.
 כפוף משותפת m יקרא קטנה ביותר ותסומן $|cm(f_1, \dots, f_k)| = m$
 אם היא מחלקת כל כפוף אחרת m' : $m | m'$

$$f_1 = c_1 \prod_{i \in I} q_i^{m_i}, \quad f_2 = c_2 \prod_{i \in I} q_i^{n_i} \quad \text{אם}$$

$$|cm(f_1, f_2)| = \prod_{i \in I} q_i^{\max(m_i, n_i)} \quad \text{אם}$$

$$m = |cm(f_1, f_2)|, \quad d = \gcd(f_1, f_2) \quad \text{הערה - אם}$$

$$dm = f_1 \cdot f_2 \quad \text{אם}$$

וקטורים עצמיים וצרכים עצמיים

הערה - יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F .
 תהי $T: V \rightarrow V$ ט"ז. יהי $\lambda \in F$ סקלר.
 קבוצה $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$
 נקראת המרחב העצמי של T היי"ך λ .
 וקטור $v \in V$ נקרא וקטור עצמי של T היי"ך λ .
 אם $v \in V_\lambda$, כדומה אם $T(v) = \lambda v$
 ג' יקרא ערך עצמי של T אם $V_\lambda \neq \{0\}$
 כדומה אם קיים וקטור עצמי של T סגור היי"ך λ

הערה - יהי F שדה. תהי $A \in M_n(F)$, ויהי $\lambda \in F$
 $V_\lambda = \{v \in F^n \mid Av = \lambda v\}$
 הוא המרחב העצמי של A היי"ך λ .
 $v \in F^n$ הוא וקטור עצמי של A היי"ך λ אם $Av = \lambda v$, כדומה אם $V_\lambda \neq \{0\}$
 ג' הוא ערך עצמי של A אם יש $v \neq 0$ כך ש- $Av = \lambda v$, כדומה אם $V_\lambda \neq \{0\}$

למה - יהי V מ"ו מעל F , תהי $T: V \rightarrow V$ ט"ז, $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס סדור של V .
 תהי $A = [T]_B^B = [T]_B^B$, יהי $\lambda \in F$. אז:
 א - $v \in V$ הוא וי"ך של T היי"ך λ $\iff [v]_B \in F^n$ הוא וי"ך של A היי"ך λ
 ב - ג' הוא ע"צ של T $\iff$ ג' ע"צ של A

משפט - א - יהי V מ"ו מעל שדה F , תהי $T: V \rightarrow V$ ט"ז. יהי $\lambda \in F$.
 $V_\lambda = \ker(T - \lambda I_V)$
 בסרט V_λ תת מרחב של V . לכן ג' ע"צ של T $\iff T - \lambda I_V$ אינה חתך.
 ב - יהי F שדה, $A \in M_n(F)$, $\lambda \in F$. אם V_λ הוא מרחב הסימנות של המערכת ההומוגנית $(A - \lambda I_n)X = 0$.
 $\det(A - \lambda I_n) = 0 \iff$ ג' ע"צ של A

משפט - יהי V מ"ו מעל שדה F . יהי $B = (v_1, \dots, v_n)$ בסיס סדור של V .
 תהי $T: V \rightarrow V$ ט"ז.
 אז $[T]_B^B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $\iff$ v_j וי"ך של T היי"ך λ_j .
 ואז λ_j הם ע"צ של T .

הסקנה - $T: V \rightarrow V$ יש הצבה אפסליות $\iff$ $\lambda = 0$ יש בסיס שמורכב מוקטורים עצמיים של T .

שם F'' משתנה מתקדמים עצמים שם A כאשר v_j ו- δ λ_j
 סה'רבן P' הסיבה $P/P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

מסקנה - V היא מרחב פונקציות
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$
 $T: V \rightarrow V$ טרנספורמציה ליניארית
 $v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_k}$ וקטורים ב- V
 $v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_k}$ הם וקטורים עצמיים של T עם ערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$
 $v_{\lambda_1}, \dots, v_{\lambda_k}$ הם וקטורים עצמיים של T עם ערכים עצמיים $\lambda_1, \dots, \lambda_k$

$F_A(x) = 0$ $F_A(x) = \det(A - xI_n)$ (1.10.1) $\det(A - \lambda I_n) = 0 \iff A$ has λ as an eigenvalue
 $\lambda \in F$ $C = (g_{ij}(\lambda)) \in M_n(F[x])$ $C(\lambda) = (g_{ij}(\lambda)) \in M_n(F)$

השורה - תהי $A \in M_n(F)$ טו G חזקה!

$f_A(x) = \det(xI_n - A) \in F[x]$

$$f_A(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_0$$

(הסתברות $f_A(x)$) $C_n = 1$ (1)

$$C_0 = (-1)^n \det A \quad (3)$$

$$f_A(x) = 0 \iff A \text{ ist } \lambda \text{ S/C}$$

כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ מונים, $f_A(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.
מה שנקרא פירוק לגנד.

מעט - עמעט ריזות דואל אונט פאלעם אפיני

הגדרה - הצבת מונומ בפולינום.
 אם $A \in M_n(F)$ ו- $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i A^i \in M_n(F)$ אז
 (גזיר) $g(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i A^i \in M_n(F)$

משפט - תהי $A \in M_n(F)$ אז $f_A(A) = 0$ (ק"י' - המינימום)

מסקנה - תהי $A \in M_n(F)$ ק"י' פולינום $f \in F[x]$ ש $f(A) = 0$ ק"י' $n \geq \deg f$

הגדרה - פולינום האופייני $f_T \in F[x]$ של T הוא הפולינום האופייני של $[T]_B^B$
 כאשר B בסיס סדור של V .

הגדרה - הצבת הצורה בפולינום.
 עבור $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i \in F[x]$ גזיר:

$$g(T) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i T^i : V \rightarrow V$$

טענה - יהי B בסיס סדור של V אז $[g(T)]_B^B = g([T]_B^B)$

משפט - ק"י' המינימום של T הוא $f_T(T) = 0$

פולינום מצרני

יהי F שדה ו- $A \in M_n(F)$ אז $I = \{f \in F[x] \mid f(A) = 0\}$ הוא אידיאל ב- $F[x]$
 $I \neq \{0\}$, I מכיל ראשוני ויש לו יוצר מתוקן יחיד ממנה $\min \{ \deg h \mid h \in I, h \neq 0 \}$

הגדרה - תהי $A \in M_n(F)$ פולינום $M_A(x) \in F[x]$ יקרא הפולינום המצרני של A
 אם הוא מתוקן ו- $M_A(x) = \{f \in F[x] \mid f(A) = 0\}$
 כלומר: M_A מתוקן, $M_A(A) = 0$ והוא מהמזל המצרני מבין
 כל הפולינומים שמאפסים את A וטונים מ-0.

משפט - לכל $f \in F[x]$ מתקיים: $f(A) = 0 \iff M_A \mid f$ (כפרט $M_A \mid f_A$)

הערות - $\deg M_A \leq n$
 $A = xI_n \iff M_A = x - \lambda$

משפט - תהי $A \in M_n(F)$ אז $f_A \mid M_A^n$ ב- $F[x]$

משפט - תהי $A \in M_n(F)$ אז f_A ו- M_A אותם גורמים אי פריקים
 מתקונים מ- $F[x]$

$$f_A = q_1^{k_1} \cdots q_r^{k_r}$$

$$M_A = q_1^{l_1} \cdots q_r^{l_r}$$

כאשר $q_i \in F[x]$ אי פריקים מתקנים שונים
 אז $1 \leq l_i \leq k_i \forall i$

מסקנה - תהי $A \in M_n(F)$ יהי $\lambda \in F$ אז $M_A(\lambda) = 0$ אם λ ע"צ אמת

משפט - תהי $M = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ ריבועיות

$$h = \text{כא}(M) = \text{כא}(M_1, \dots, M_n)$$

נסמן
אז:

א - h/M_n
ב - אם $x \neq 0$ אז $h = M_n$

משפט - מטריצות דומות אותו פולינום מצד

תרגיל שימושי - אם $A \in M_n(F)$ בעלת ריבויים שונים מסוים באמצעות הומומורפיזם $M_A = F_A$ ומתחתיו ק 0 , אז $\deg M_A = n$, ולכן

יהי V מ"מ מעל F , ו- $T: V \rightarrow V$ ליניארית.

הצגה - פולינום $M(x) \in F[x]$ "קרו" הפולינום המצד של T
אם $M(T) = 0$ ו- M הוא מתקן בדל המצד המצדית מבין כל הפולינומים
הטונים מ- 0 שמאפסים את T .
זהו הצד המתקן היחיד של האיזוט

$$I = \{f \in F[x] \mid f(T) = 0\}$$

משפט - א - אם $V = \{0\}$ אז $M_T = 1$
ב - אם $V \neq \{0\}$, יהי B בסיס של V .
תהי $C = [T]_B^B$ אז $M_T = M_C$

ריבויים של ערכים עצמאיים ושלוש

הצגה - יהי $\lambda \in F$ ע"ע של T
הריבוי האמצעי של λ הוא המעריך א צמו מופיע (ג- λ) בפירוק T
הריבוי הביאומטרי של λ הוא המימד של צמד $V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$

למה - הריבוי הביאומטרי של λ קטן או שווה לריבוי האמצעי של λ .

משפט - להסתק $T: V \rightarrow V$ יש הצגה אלכסונית $\longleftrightarrow$
 T מכפלה של גורמים ממעלה אחת ב- $F[x]$ ולכן ע"ע של T הריבוי האמצעי שווה לביאומטרי

הצגה - מטריצה $A \in M_n(F)$ נקראת משפטי (עיונה) אם $\text{כא}(A) = 0$ כל זכה.

משפט - תהי $A \in M_n(F)$ ויהי $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$
אז יש מטריצה משפטי A עיונה ש- A דומה לה $\longleftrightarrow$
 $f_A(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$

סקנה - אם f שזה סזור אלגברית, אז כל $A \in M_n(F)$ דומה למשפטי

סקנה - יהי V מ"מ ממעלה n מעל F תהי $T: V \rightarrow V$ ש"י יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$
אז קיים בסיס B של V קן ש- $[T]_B^B$ משפטי עם אמצעון ראשי $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
 $f_T = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n) \longleftrightarrow$

הפירוק הישרי

הפירוק - תת מרחב $W \subseteq V$ נקראי שטור T אם $T(W) \subseteq W$ כלומר אם $T(W) \subseteq W$ כלומר אם $T(W) \subseteq W$
 במקרה כזה הצמצום של T על W , כלומר $T|_W: W \rightarrow W$, כלומר $T|_W: W \rightarrow W$
 הוא הפירוק הישרי, והוא מסומן $T|_W$.

דוגמה - אם W שטור של T ו- $W \subseteq V_2$ אז W הוא שטור של T .

תכונות - תהייה $S, T: V \rightarrow V$ שטורים קו-ט. $ST = TS$

א - $\text{Ker}(S), \text{Im}(S)$ הם שטורי T

ב - אם $W \subseteq V$ שטור של T אז גם $S(W)$ שטור של T

ג - אם $W_1, W_2 \subseteq V$ שטורי T אז גם $W_1 \cap W_2$ ו- $W_1 + W_2$ שטורי T

ד - נניח T איזו. אם $W \subseteq V$ תת מרחב שטור של T ו- $\dim W < \infty$ אז W שטור של T^{-1}

מסקנה - יהי $f \in F[x]$. אז $\text{Ker} f(T), \text{Im} f(T)$ שטורי T

הפירוק - יהי V מ"ו ויהיו $W_1, \dots, W_s \subseteq V$ תת מרחבים שטורי.

נאמר ש- V הוא הסכום הישר של $W_1, \dots, W_s$

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$$

אם $v \in V$ יש הצגה יחידה מהצורה $v = w_1 + \dots + w_s, w_i \in W_i$

משפט - יהי V מ"ו ויהיו $W_1, \dots, W_s$ תת מרחבים שטורי.

כל $v \in V$ יחידה $v = w_1 + \dots + w_s$ $B_i = (w_{i1}, \dots, w_{in_i})$ בסיס סדור של W_i

אזי $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s \iff B = \bigcup B_i$ בסיס של V .

משפט - נניח כי $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$ ונסמן $B_i = (w_{i1}, \dots, w_{in_i})$ בסיס של W_i

כן ש- $B = \bigcup B_i$ בסיס של V .

א - נרשום את $[T]_B^B$ כמטריצת גושים, כאשר $A_{ij} \in M_{n_j}(F)$ כאשר $A_{ij} = [T|_{W_j}]_{B_j}^{B_i}$ ו- $A_{ij} = 0$ אם $i \neq j$

נקבע שצגה T איז n_j שטור של T ו- $A_{ij} = [T|_{W_j}]_{B_j}^{B_i}$

אם נשאיר מקומות אלה מתקיימים, אז $A_{ij} = [T|_{W_j}]_{B_j}^{B_i}$

ב - $W_1, \dots, W_s$ שטורי $T \iff [T]_B^B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots \\ 0 & A_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$ כל $s \leq j \leq 1$

ג - אם התנאים הטקניים בלי מתקיימים, אז $A_j = [T|_{W_j}]_{B_j}^{B_j}$ כל $s \leq j \leq 1$

מסקנה - נניח כי $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_s$, כאשר $W_1, \dots, W_s$ שטורי T .

נסמן $T_i = T|_{W_i}$ כל $s \leq i \leq 1$ אז:

$$f_T(x) = f_{T_1}(x) \cdot \dots \cdot f_{T_s}(x)$$

$$m_T(x) = \text{lcm}(m_{T_1}(x), \dots, m_{T_s}(x))$$

למה - יהי $W \subseteq V$ תת מרחב שטור של T . יהי $S = T|_W: W \rightarrow W$ הצמצום של T על W . אז:

א - יהי $f \in F[x]$ כל $W \subseteq V$ מתקיים $f(S) = f(T|_W) = f(T)|_W$, כלומר $f(T|_W) = f(T)|_W$

ב - $m_S | m_T$

ג - $f_S | f_T$

משפט - יהי V מ"ו מרחב טור F ותהי $T: V \rightarrow V$ שטור. יהיו $g, h \in F[x]$ כזו

קו-ט - $(gh)(T) = 0$. אז $V = \text{Ker } g(T) \oplus \text{Ker } h(T)$

מסקנה - יהיו $g, h \in F[x]$ מתקיימים ערים כן ש- $m_T = gh$.

נסמן T_1, T_2 שטורי T ו- $\text{Ker } g(T), \text{Ker } h(T)$ אז הצמצומים של T על $\text{Ker } g(T)$ ו- $\text{Ker } h(T)$ הם T_1 ו- T_2 ש- $g = m_{T_1}$ ו- $h = m_{T_2}$

$$g = m_{T_1}, h = m_{T_2}$$

משפט ההיחזק ההרמרי - יהי V מרחב סדר F ויהי $T: V \rightarrow V$ סדר
 כקט $(g_1, \dots, g_n)$ $T = g_1 \dots g_n$ $(g_1, \dots, g_n)$ מתוקנים (זרים)
 נסמך $w_i = \text{arg} \dots$

$T = \gamma / v$

$w_1, \dots, w_s$

$\text{where } V = w_1 (\oplus) \dots (\oplus) w_s$

$- K$

$i \in S \quad g_i = mT/w_i$

$- 2$

* הטימוס, הטיקרי של המעבד: אם $m_T = g_1^{r_1} \dots g_s^{r_s}$ כאשר $g_1, \dots, g_s$ זרים, $g_i = g^{r_i}$, ונקבל

מסקנה - מטריצה עם פירוק פרימר

יהי V מ"ו מעל F ותהי $T: V \rightarrow V$.

נניח כי $q_1^r, \dots, q_s^r = m_T$ כאן-ביק'ם ממוקמים $-1 \leq r_1, \dots, r_s \leq 1$

$$W_i = \text{Ker } g_i^{-1}(T) / (n_i)$$

v של סוסים $W_1, \dots, W_s$ של $B_1, \dots, B_s$ p סוסים של B n - 1

$$A_i = [T|u_i]_{B_i}^{B_i} \quad \text{וכאן} \quad [T]_B^B = \text{Diag}(A_1, \dots, A_t) \text{ המטריצה}$$
$$m_{A_i} = q_i^{r_i} - 1$$

כעת $[T]_B^B = \text{Diag}(A_1, \dots, A_n)$ - ו

M_A : חזקת של פוע' נאמ' או פריק'ם טו'נס.

רענען כי $A_i \in M_{n_i}(F)$ זי. רעכענען אז B צוזאם מיט 30 צו

$$|B_i| = n_i$$
$$m_{A_i} = q_i^{r_i}, \quad [T/w_i]_{B_i}^{B_i} = A_i, \quad w_i \in (0, 2) \quad B_i$$

80. T: $V \rightarrow V$ and F are in V - Coon

$\longleftrightarrow$ $\text{שני צדדים} [T]_{\beta}^{\beta} - \text{כל } V \text{ שם}$

משפט 7.1.1. $\mu_1, \dots, \mu_s$ נקראים **ממוצעים** של X , ו- $m_T = (X - \mu_1) \cdots (X - \mu_s)$ נקראת **פולינום מינימלי** של X .

הקנה - $A \in M_n(F)$ זוגית מטריצה של מספרים

הנני מניח $\mu_1, \dots, \mu_s \in F$ וכן $M_A = (x - \mu_1) \dots (x - \mu_s)$

1377 1378

$$T: V \rightarrow V, \text{ '210' RNW } f_2 \text{ f } f_3 \text{ in } V$$

הצורה - המטריצה $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \\ 0 & i\lambda \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{H})$ מקבלת בזז עובדי λ וזוהי n ויטמן $J_n(\lambda)$

$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$ כאשר $J(x) = \begin{bmatrix} J_{n_1}(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{n_k}(x) \end{bmatrix}$ מהצורה

מקראת מסור 137/2 ש' 2, והמספר 11, הוא אינזקס המסור.

מטריצת ג'ורדן היא מהצורה $J = \begin{bmatrix} J(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J(\lambda_k) \end{bmatrix}$, כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F$ שונים

λ_i هو الجذر i لـ $P(\lambda)$, $1 \leq i \leq 5$

משפט - 13727 שט

$\forall i, |r_i| = 1$ ו'יש $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in F$ שכן $m_T = (x - \lambda_1)^{r_1} \dots (x - \lambda_s)^{r_s}$ ו'יש

אס קיימט מ'גרייט זיך צו ווייזן יחידה פון אברהם'ס זון וועלכע וועט זיין א

$$[T]_0^B = J$$

ב-5 יולי 1978, כאשר המעורר ה-2 שיוך 8-22 ובא ליניקס 22

משקנה - תהי $A \in M_n(F)$ ונניח $m_A = (x - \lambda_1)^{r_1} \dots (x - \lambda_s)^{r_s}$ כן, אז

איש קיימת מטריצת 2×2 יחידה σ צומת $A - \sigma$, שטאפ"ניה כמו קודם.

הסרה - כיצד נעשה בחזקה מטריצת גורדן?

$$J_n(\lambda)^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & 0 & \dots & 0 \\ \binom{k}{1} \lambda^{k-1} & \lambda^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{k}{n-2} \lambda^{k-(n-2)} & \dots & \lambda^k & 0 \\ \binom{k}{n-1} \lambda^{k-(n-1)} & \dots & \dots & \lambda^k \end{bmatrix}$$

נבין איך מחלים בחזקה אט גורדן -
 * עבור $k > n$, $\binom{k}{i} = 0$

מטריצת גורדן J היא מטריצת גושים אלוטוים, כלומר J^k היא מטריצת גושים אלוטוים, כלומר J^k היא מטריצת גושים אלוטוים, כלומר J^k היא מטריצת גושים אלוטוים.

תהי $A \in M_n(F)$ ונניח שאנו יודעים למצוא P הפינה כך ש-
 $A^k = P^{-1} J^k P$ - אז

מסקנה - תהי J מטריצת גורדן, יהי $\lambda \in F$ ויהי $k \geq 0$ שם.

$$\text{rank } J_n(\lambda)^k = \begin{cases} n-k, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

אם $\lambda \neq 0$ אז $\text{rank } J_n(\lambda)^k = n$ - אז

אם $\lambda = 0$ אז $\text{rank } J_n(0)^k = \text{rank } (J - \lambda I)^k$ - אז

הוא מספר גושים גורדן J הטייפים λ והינם מספר $k \leq n$

מסקנה - אם B בסיס של V כך ש- $J = [T]_B^B$ מטריצת גורדן

אז מספר גושים גורדן $J_k(\lambda)$ של J הוא:
 $\text{rank } (T - \lambda \cdot I)^{k+1} - \text{rank } (T - \lambda \cdot I)^k + \text{rank } (T - \lambda \cdot I)^{k-1} - \dots$
 בפרט, J יחידה עד כדי סדר מסוים

מסקנה - א - $m_{J_n(\lambda)} = (x - \lambda)^n$

ג - נניח שמערכי J טיפיים $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in F$ שונים וכל אינדקס i $v_1, \dots, v_s$.

אז $m_J = (x - \lambda_1)^{r_1} \dots (x - \lambda_s)^{r_s}$

ג - נניח ש- $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in F$ כאשר $m_J = (x - \lambda_1)^{r_1} \dots (x - \lambda_s)^{r_s}$ ו- $v_1, \dots, v_s$ אינם מערכי J הטייפים $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ שונים.

הם בעלי אינדקסים $r_1, \dots, r_s$ בהתאמה.

* תהי $N: V \rightarrow V$ טע (במקום T) מעתה.

הערה - סדרה $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k \in V$ נקראת שכבת גורדן (שם N) באורך k קטן:
 $N(v_1) = v_2, N(v_2) = v_3, \dots, N(v_{k-1}) = v_k, N(v_k) = 0$

או - הסדרה היא:
 $N^k(v) = (N^j(v))_{j=0}^{k-1}, v \in \text{Ker } N^k$

פרג'ס - $[N]_B^B = J_k(0)$ מערך גורדן של $0 \leftrightarrow B$ שגשגת גורדן מאורך k .
 - $[N]_B^B$ מערך גורדן של $0 \leftrightarrow B$ צחל של שטואט גורדן שגשגת אינדקס אופי k .

מעט - נניח $N^r = 0, r \geq 1$. אז קיים בסיס B של V כך ש- $[N]_B^B$ מערך גורדן של 0 .

* נדומה - $B = v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n$ $N^r(v) = (N^j(v))_{j=0}^{r-1}$ $A_k \in \text{Ker } N^{r+1-k}$

בנייה - נרצה עבור $V \rightarrow M: V$ ק ש. $N = 0$ לבנות במסלול V ק ש: $[N]_0^0$

$V = N^0(V) \rightarrow N(V) \xrightarrow{N} N^2(V) \rightarrow \dots \rightarrow N^{r-2}(V) \xrightarrow{N} N^{r-1}(V) \rightarrow N^r(V) = \{0\}$
 (שטחיות מרחב) N הפעולה $N_N = \chi^r$ נ"ח
 $A_k \subseteq N^{r-k}(V)$ אם $N^{r-k}(A_k)$ נסמן $A_k \subseteq V$ סגור σ סמיון -

$$N^{r-1}(V) \text{ 是 } \mathbb{C} \text{ 的 } N^{r-1}(A_i) \text{ 的 } \gamma \text{ 个 } A_i \subseteq V \text{ 的 } (1)$$

$(N^{r-2})^{-1}(\text{Ker } N') = \text{Ker } N^{r-1}$ גם $N' = N|_{N^{r-2}(V)}$ (2)
 $N^{r-2}(A_2) \cap \text{Ker } N' \subseteq \text{Ker } N^{r-1}(A_1) = N^{r-2}(N(A_1))$ כל $N^{r-2}(v)$ שייך ל $\text{Ker } N'$
 $\text{Ker } N^{r-1} / \text{Ker } N^{r-2} \subseteq \text{Ker } N(A_1) \cup A_2$ כל $N^{r-2}(v)$ שייך ל $\text{Ker } N'$

הקב"ם הממוצע $B = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \sum_{v \in V_k} (N^j(v))_{j=0}^{r-1}$ (3)

תרגיל - תהי T צימת ג'ורן של D . L ו- M מספר גוטי ג'ורן T של g
היא הריבוי הלאאמרי של g ב- D .

אסמאותם עז'רצון מטרות

$T(v_1) = \lambda v_1 + v_2 \rightarrow (T - \lambda I)v_1 = v_2$

$$T(V_n) = \lambda V_n \longrightarrow (T - \lambda I)V_n = 0$$

סדרת וקטורים כצאת קרואת טורית $2/7/71$.
נחשט במיס על החרה שאורכה מעטנות באלי.

: $A \in M_n(F)$ בהנחת

(1) 'מחצית' פשוט' אפ"י

(2) שכל 2 ימים ריבוי אחד ברי 4 :

(3) נחשב ל n חזקים λ אפסות, כאשר $j=1$ מתקיים $\dim V_\lambda = k$

$$V_j = N((A - \lambda I)^j)$$

משפט 2.3 - $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n$

V_i 68 0'0'02 K3N1 (4)

$$d_1 = \dim V_1 - \dim V_1 \cap V_2, \dots, d_2 = \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2, \dots, d_i = \dim V_i \quad \text{NOJ} \quad (5)$$

(6) רשמה שם שורח מלמח עממח כט בעמח ה- j י' dj מקומות

(7) שורה ג' מלממח עממח (יסוס) שרמח

(7) אבא שורה ג' מלמדה עמרה! (שיש בה מקום פנוי)

(8) נבחר du וקטורים ב- $V_{\lambda-1}$ שמתם ρ הבסיס של $V_{\lambda-1}$

(9) עכס וקטור שטיקמאן:

(10) $(A - 2I)V = 0$ חוקי שמתקין

1) נרשם את כל הווקטורים כבסיס, צמודה-עמודה משמאל לימין, והקבץ (A-11/V) הווקטורים

(ו) מעדן השירן המתאים יהיה מרכז מבקריו מחסרם כחספס הצחחות

$$P = (p_{ij}) \quad p_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_{ik} x_{jk}$$

הצורה הרציונלית (צורת יעקובסון)

יהי V מ"ו נוצר מסתת מעל שדה F , ו- $V \rightarrow V$ ד"ר ϕ .

הצורה - יהי $q = a_0 + a_1x + \dots + a_{d-1}x^{d-1} \in F[x]$ פולינום מתיקן ממעלה d .

המטריצה הנלווית $C(q)$ היא:

$$C(q) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_d(F)$$

כפרט - $C(x-g) = [g]$

- עבור $M \in V$, M גוש יעקובסון מאורך r של q יהיה:

$$C_r(q) = \begin{bmatrix} C(q) & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \in M_{d+r}(F), \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in M_d(F)$$

כפרט, $C_r(x-g)$ היא $J_r(g)$

- מערך יעקובסון של q הוא:

$$C(q) = \begin{bmatrix} C(q) & 0 \\ 0 & C(q) \end{bmatrix}$$

כפרט, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$

הוא נקרא האינדקס של המערך.

- מטריצת יעקובסון היא מטריצה מהצורה:

$$C = \begin{bmatrix} C(q_1) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & C(q_s) \end{bmatrix}$$

כאשר $q_1, \dots, q_s \in F[x]$ אינדיקס מתקנים שונים

משפט - V י"ט בסט B כך ש- $[T]_B^B$ מטריצת יעקובסון, (היא יחידה (עד כדי סדר המערכים) אם $q_1, \dots, q_s = q$ או במטריצה q נאמר יעקובסון, כאשר המערך ה- i הוא של q_i וגודל אינדקס n_i).

סקנה - תהי $A \in M_n(F)$ או קיימת מטריצת יעקובסון יחידה (המתאימה ל- A כמו מתואר במשפט) C כך ש- $A = C$.

תוצא - יהי $q \in F[x]$ מתיקן ממעלה d , ויהי $C = C_r(q) \in M_{d+r}(F)$ או $q^r = m_c = f_c$

סקנה - תהי C מטריצת יעקובסון. יהיו $C_1, \dots, C_s$ המערכים שלה, C_i טי"ן ל- q_i האינדקס n_i של q_i הוא n_i .

סימא - מסתת יהי $q \in F[x]$ ממעלה d . תהי $N = q(T)$ או $N \in V$ ו- $v \in V$:

$$T^d(v) = \sum_{i=0}^{d-1} a_i T^i(v) + N(v)$$

עבור $v \in V$ נאמן $\tilde{v} = (v, T(v), \dots, T^{d-1}(v))$
 עבור סדרת וקטורים $A = (v_1, \dots, v_k)$ נאמן $\tilde{A} = (v_1, \dots, v_k, T(v_1), \dots, T(v_k), \dots, T^{d-1}(v_1), \dots, T^{d-1}(v_k))$
 נשים לב $|\tilde{A}| = d|A|$, וטעם A, B סדרות $\tilde{A}, \tilde{B}$ שווה $\tilde{A} \tilde{B}^T = N(\tilde{A})$ ו- $N(\tilde{A}) = N(A)$ $N(\tilde{A}) = N(A)$ $N(\tilde{A}) = N(A)$ $N(\tilde{A}) = N(A)$

תוצא - יהי B בסט של V ו- $\tilde{v}$ האיקר הראשון בו.
 או - $C_r(q) = [T]_B^B = (T^i(v_j))_{j=0}^{d-1}$ $B' = (\tilde{v}, N(\tilde{v}), \dots, N^{d-1}(\tilde{v}))$ ו- $v \in N$
 ב - אם B מקיים את N , אז $B = (N^i(v))_{i=0}^{d-1}$ בסט של V .
 ו- $[N]_B^B = D \operatorname{diag}(J_r(0), \dots, J_r(0))$

מסקנה - יהי B' בסיס של V אז
 $[T]_{B'}^{B'} = \text{Diag}(\underbrace{C_1(q), \dots, C_r(q)}_{\text{אז}}, \underbrace{C_{r+1}(q), \dots, C_{r-1}(q)}_{\text{אז}}, \dots, \underbrace{C_1(q), \dots, C_1(q)}_{\text{אז}})$ - א

אם $|A_k| = d_k - 1$, $A_k \subseteq K \cap N^{r-k}$ כאשר $B = V_{k=1}^r V_{k \in A_k} (N_j(v))_{j=0}^{r-k}$

ג - אם B' כמו קודם אז $B = V_{k=1}^r V_{k \in A_k} (N_j(v))_{j=0}^{r-k}$ ו- $[N]_{B'}^{B'} = \text{Diag}(\underbrace{J_r(0), \dots, J_r(0)}_{d|A_1|}, \underbrace{J_{r-1}(0), \dots, J_{r-1}(0)}_{d|A_2|}, \dots, \underbrace{J_1(0), \dots, J_1(0)}_{d|A_r|})$

$$[N]_{B'}^{B'} = \text{Diag}(\underbrace{J_r(0), \dots, J_r(0)}_{d|A_1|}, \underbrace{J_{r-1}(0), \dots, J_{r-1}(0)}_{d|A_2|}, \dots, \underbrace{J_1(0), \dots, J_1(0)}_{d|A_r|})$$

למה - נניח q אי-פריק $q(T) = 0$
 תהי $B \subseteq V$ סדרה כך ש- $\tilde{B}$ בסיס של V
 אז יש $A \subseteq V$ כך ש- $\tilde{B} \cup A$ בסיס של V
 פשוט יש $A \subseteq V$ כך ש- $\tilde{A}$ בסיס של V

משפט - נניח כי $m_T = q^r$, $q \in F[x]$ פולינום אי-פריק ממעלה d .
 אז יש C חזקה יעקובסון יחידה צמודה של C (אז C חזקה יחידה)
 כך ש- $[T]_{B'}^{B'} = C$, C מעריך יעקובסון עם אינטגרל של q

תרגיל - תהי $A \in M_n(F)$ אז:

$$f_A = f_{A^t} \quad - \text{א}$$

$$m_A = m_{A^t} \quad - \text{ב}$$

$$A^t \sim B^t \iff A \sim B \quad - \text{ג}$$

$$A \sim A^t \quad - \text{ד}$$

תרגיל - יהיו $f \subseteq f'$ טבעית. תהי $A, B \in M_n(F)$ בזוגות f אז B זוגות f' אז B זוגות f

מרחבי מכפלה פנימית

בספר זה $F = \mathbb{R}$ או $F = \mathbb{C}$

תכונות סתכנות מרוכבים:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{\overline{z} z} = |z|^2$
- $\overline{Re(z)} = \frac{z + \overline{z}}{2}$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- $z = 0 \iff |z| = 0$
- $\overline{\overline{z}} = z$

הגדרה - יהי V מ"ו מעל F .
מכפלה פנימית על V היא $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow F$ כך שמתקיים:
 1) $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
 2) $\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
 3) $\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$
 4) $\langle v, v \rangle \geq 0$

המכפלה הסטנדרטית (הסקלרית) מוגדרת: $\langle u, v \rangle_{st} = \overline{u} \cdot v = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} \cdot b_i$

למה -

- 1) $\langle u+w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$
- 2) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
- 3) $\langle 0, v \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$

הגדרה - 1) $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ - הנורמה (אוק) של v
 2) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ - נוצר על V
 3) סדרה $u_1, \dots, u_n \in V$ נקראת אורתוגונלית אם $u_i \perp u_j$ $\forall i \neq j$
 4) סדרה $u_1, \dots, u_n \in V$ נקראת אורתונורמלית אם היא אורתוגונלית ו- $\|u_i\| = 1$ כל אחד.

דוגמה קנונית - הבסיס הסטנדרטי הוא אורתונורמלי ביחס למכפלה הסטנדרטית.

למה - 1) $u_1, \dots, u_n$ תהי סדרה אורתוגונלית במרחב מכפלה פנימית V .
 יהי $v = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n \in V$

א - $a_i = \frac{\langle u_i, v \rangle}{\|u_i\|^2} = \langle u_i, u \rangle$ אם $u_i \neq 0$ אחרת $a_i = 0$
 ב - $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i \|u_i\|^2$
 ג - $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \|u_i\|^2$ אם $\|u_i\| = 1$ אחרת $\|u_i\| = 1$ אחרת $\|u_i\| = 1$

2) $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i$
 3) $\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2$

סקנה - יהי B בסיס אורתונורמלי של מרחב מכפלה פנימית V .
 יהי $u, v \in V$ אז $\langle u, v \rangle = \langle [u]_B, [v]_B \rangle$

משפט - סדרה אורתוגונלית $u_1, \dots, u_n$ שאינה מ- n היא קטע.

תהליך Gram-Schmidt סמיכות בסיס אורתונורמלי

- נתונה סדרה $v_1, \dots, v_n \in V$. נמצא סדרה אורתונורמלית $u_1, \dots, u_n \in V$ המקיימת:
- $\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(u_1, \dots, u_k) \quad \forall k=1, \dots, n$
 - $u_i = 0 \iff v_i = 0$
 - בפרט מתקיים: $u_i \neq 0 \iff v_i \neq 0$
 - $v_1, \dots, v_n$ בסיס $V \iff u_1, \dots, u_n$ בסיס V

בנייה - נבנה סדרה באינדוקציה על k .

בסיס - $u_1 = v_1$
 סדרה $u_1, \dots, u_k$ נבחרה
 כאשר: $u_{k+1} = v_{k+1} - (c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k)$

$$c_i = \frac{\langle u_i, v_{k+1} \rangle}{\|u_i\|^2}, \quad u_i \neq 0$$

$$c_i = 0, \quad u_i = 0$$

(כלומר $\langle u_i, v_{k+1} \rangle = c_i \|u_i\|^2$)

* הסדרה ניתן להשקיע u_{k+1} ב- $\|u_{k+1}\|$ כדי לקבל בסיס אורתונורמלי.
 מסקנה - יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית. אז יש δ בסיס אורתונורמלי.

הערה - הנמשלות הפיזיקליות על תהליך Gram-Schmidt

נסמן $U = \text{span}(u_1, \dots, u_k) = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$
 $u = c_1 u_1 + \dots + c_k u_k$

אז $u \in U$, ו- $v_{k+1} = u + u_{k+1}$, ו- u_{k+1} ניצב U - δ .

- u הוא ההיטל של v_{k+1} על U
- u_{k+1} הוא החלק ממקום ב- U עקבה של v_{k+1} , שניצב U - δ
- בפרט, אנחנו $\|u_{k+1}\|$ הוא המרחק בין U עקבה של v_{k+1} .

מסקנה - יהי V מרחב מכפלה פנימית נוצר סופית.
 תהי $v_1, \dots, v_r$ סדרה אורתונורמלית שאינה טועם n -ים.
 אז אפשר להשלים δ בסיס אורתונורמלי של V .

מעט - אי שיוויון קוסי-טורלר

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו v_1, v_2 וקטורים ב- V .
 אז מתקיים:

$$\|v_1\| \|v_2\| \geq |\langle v_1, v_2 \rangle|$$

ויש שיוויון אם v_1, v_2 תלויים ליניארית.

מעט - אי-שיוויון המשולש

יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $v_1, v_2 \in V$. אז $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$

הערה - יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי U תת-מרחב של V .
המשלים הניצב (האורתונורמלי) הוא - $U^\perp = \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \forall u \in U\}$

למה - א - $U^\perp$ תת-מרחב של V
 ב - $U \cap U^\perp = \{0\}$

מציאת המשלים הניצב במרחב נוצר סופית:
 יהי $v_1, \dots, v_r$ בסיס של U . נשלים δ בסיס של V : $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$.
 בעזרת תהליך גרם-שמידט נמצא בסיס אורתונורמלי $u_1, \dots, u_n$.
 כך ש- $\text{span}(u_1, \dots, u_r) = \text{span}(v_1, \dots, v_r) = U$. אז $U^\perp = \text{span}(u_{r+1}, \dots, u_n)$

משפט - א - $U^\perp = \text{span}(u_{r+1}, \dots, u_n)$ בפרט $U + U^\perp = V$
 ב - $U \cap U^\perp = \{0\}$
 מסקנה - אם V נוצר סופית, $(U^\perp)^\perp = U$

הסקנות במרחבי סכימא

בסדר זה, $F = \mathbb{R}$ או $F = \mathbb{C}$, V מרחב סכימא ממד n מעל F . $T: V \rightarrow V$ סכימא. משפט - סכימא T קיים $T^*: V \rightarrow V$ יחיד המקיים:
 $\forall u, v \in V, \langle T(u), v \rangle = \langle u, T^*(v) \rangle$
 ו- $T^{**} = T$.

הצגה - T^* נקראת ההצגה המצוגה של T . עבור $A \in M_n(F)$, המטריצה המצוגה של A היא $A^* \in M_n(F)$ שמתקיים:
 $(A^*)_{ji} = \overline{(A)_{ij}}$ אם $F = \mathbb{C}$, או $A^* = A^T$ אם $F = \mathbb{R}$.

משפט - יהי $B = (u_1, \dots, u_n)$ בסיס אורתונורמלי של V . אז $[T^*]_B = [T]_B^*$.

למה - יהי $T, S: V \rightarrow V$ ו- $F = \mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$.
 (1) $(T + S)^* = T^* + S^*$
 (2) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
 (3) $(TS)^* = S^* T^*$
 (4) $((T^*)^*)^* = T$

הצגה - תהי $T: V \rightarrow V$ סכימא ו- $A \in M_n(F)$.
 $T^* = T$ נקראת הצגה עצמה אם $T = T^*$, $A = A^*$.
 $T^* T = I$ נקראת אוניטרית אם $T^* T = I$, $A A^* = I$.
 $T^* T = T T^* = I$ נקראת אוניטרית מלאה אם $T^* T = T T^* = I$, $A A^* = A^* A = I$.

הסקנה - יהי B בסיס אורתונורמלי של V , ו- $A = [T]_B$. אז T עצמה / אוניטרית / אוניטרית מלאה $\iff A = A^*$ / $A A^* = I$ / $A A^* = A^* A = I$.

למה - נניח $\langle v, T(v) \rangle = 0$ $\forall v \in V$, ונניח $F = \mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$.
 אם $F = \mathbb{C}$, אז $T = 0$.
 אם $F = \mathbb{R}$, אז $T = 0$ או $T = I$.

משפט - נניח $F = \mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$. אז $T = T^*$ $\iff \langle v, T(v) \rangle \in \mathbb{R} \forall v \in V$.

משפט - התנאים הבאים שקולים:

- (1) $T^* T = I$
- (2) $T T^* = I$
- (3) T מעצקה כל בסיס אורתונורמלי של V לבסיס אורתונורמלי של V .
- (4) T מעצקה כל בסיס אורתונורמלי ממדים של V לבסיס אורתונורמלי של V .
- (5) T מעצמת מכפלה פנימית: $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ $\forall u, v \in V$.
- (6) T מעצמת נורמה: $\|T(u)\| = \|u\|$ $\forall u \in V$.
- (7) T מעצמת מרחק: $\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|$ $\forall u, v \in V$.

משפט - עבור $A \in M_n(F)$ התנאים הבאים שקולים:

- (1) $A^* A = A A^* = I$ אוניטרית
- (2) A העוצמת של A בסיס אורתונורמלי
- (3) A העוצמת של A השרות של A

למה - יהי $T: V \rightarrow V$ ו- $\lambda \in F$.
 $T^*(\lambda v) = \overline{\lambda} T^*(v)$ ויהי $(T^* T = T T^*)$
 $T^*(\lambda v) = \overline{\lambda} T^*(v)$ אז $T^*(\lambda v) = \lambda T^*(v)$

למה - תהי $T: V \rightarrow V$ נורמלית. וקטורים עצמאיים תלויים על סרטים עצמאיים טונים נמצאים זה לזה.

למה - תהי $T: V \rightarrow V$ ט"ל כך ש- f מכפלה של שריקים (ג- x).
אז T נורמלית $\iff$ קיים בסיס אורתונורמלי B של V המורכב מ- n ו"ע של T
(כסומר ב[T] אלקסוניה)

משפט - נניח $F = \mathbb{C}$. ט"ל $T: V \rightarrow V$ היא נורמלית $\iff$ קיים בסיס אורתונורמלי B של V המורכב מ- n ו"ע של T (אלקסוניה)

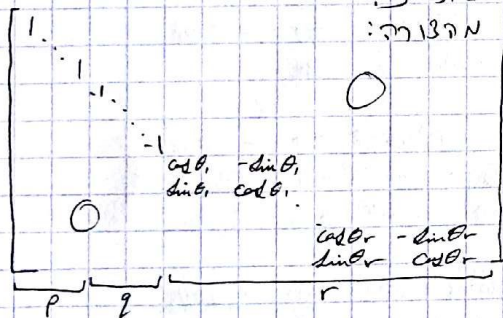
מסקנה - $A \in M_n(\mathbb{C})$ אז A נורמלית $\iff$ קיימת $P \in M_n(\mathbb{C})$ אונטרית כך ש $P^{-1}AP = P^*AP$ אלקסוניה

מסקנה - תהי $A \in M_n(F)$ נורמלית. אז:
א - A צמוד עצמה $\iff$ כל שרטי f_A ב- $\mathbb{C}$ הם ממשיים.
ב - A אונטרית $\iff$ כל שרטי f_A ב- $\mathbb{R}$ הם בעלי ערך מוחלט 1.

משפט - נניח $F = \mathbb{R}$. ט"ל $T: V \rightarrow V$ היא צמוד עצמה $\iff$ קיים בסיס אורתונורמלי B של V המורכב מוקטורים עצמאיים של T (אלקסוניה)

מסקנה - מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית $\iff$ קיימת $P \in M_n(\mathbb{R})$ אורתונורמלית כך ש $P^{-1}AP = P^*AP$ אלקסוניה

משפט - נניח $F = \mathbb{R}$, תהי $T: V \rightarrow V$ ט"ל אורתונורמלית.
אז קיים בסיס B של V כך ש- B [הצורה:



תבניות ביילי (אורית)

הערה - תבניות ביילי נאורות על $V \times W$ היא העקרה $f: V \times W \rightarrow F$ המקיימת:

$$\begin{aligned} f(v+v', w) &= f(v, w) + f(v', w) \\ f(\alpha v, w) &= \alpha f(v, w) \\ f(v, w+w') &= f(v, w) + f(v, w') \\ f(w, \alpha v) &= \alpha f(w, v) \end{aligned}$$

אוסף התבניות הביילי נאורות הוא מרחב וקטורי F (נסמן $Bil(V, W)$) הפעולות ע"י:

$$\begin{aligned} (f+g)(v, w) &= f(v, w) + g(v, w) \\ (\alpha f)(v, w) &= \alpha f(v, w) \end{aligned}$$

משפט - יהי $B = (v_1, \dots, v_m)$ בסיס של V , $C = (w_1, \dots, w_n)$ בסיס של W .
(1) $f \in Bil(V, W)$ קיימת מטריצה יחידה $A \in M_{mn}(F)$ $A = \theta_C^B(f)$ קט'.

(2) המטריצה $A = \theta_C^B$ מוגדרת ע"י:

$$(A)_{ij} = f(v_i, w_j)$$

(3) תהי $A \in M_{mn}(F)$ נצדיר $f: V \times W \rightarrow F$ כמו ב-1.
אז f תבנית ביילי נאורת ו- $A = \theta_C^B(f)$

(4) התאמה $A \mapsto f$ הנ"ל היא איזומורפיזם של מרחבים וקטוריים.

$$\dim \text{Bil}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$$

$$\dim \text{Bil}(V, V) = (\dim V)^2$$

מסקנה -

מטבט - יהיו B, B' שני בסיסים של V ויהיו C, C' שני בסיסים של W .
 תהיה $A = \theta_{C'}^B(F)$, $A' = \theta_{C'}^{B'}(F)$, $A = P^t A' Q$ כאשר $Q: B \rightarrow B'$ מטריצת מעבר, $P: C \rightarrow C'$ מטריצת מעבר.

הערה - מטריצות $A, A' \in M_{m \times n}(F)$ נקראות שקילות אם יש $Q \in M_n(F)$, $P \in M_m(F)$ כך ש-
 $A' = P^t A Q$ - שקילות קטורה
 $A' = P^t A P$ - שקילות חופפות

* הערה - חפיפה ושקילות הם יחס שקילות

- 1 - מסקנה $A, A' \in M_{m \times n}(F)$ שקילות $\iff$ ק מ"צות אותה תבנית בינארית (בבסיסים אחרים)
- 2 - $A, A' \in M_{m \times n}(F)$ שקילות $\iff$ $\text{rank } A = \text{rank } A'$
- 3 - $A, A' \in M_n(F)$ חופפות $\iff$ ק מ"צות אותה תבנית בינארית של V

לענה - תהי $A, A' \in M_n(F)$ חופפות, אז $\text{rank } A = \text{rank } A'$ ו- $\det A' = c^t \det A$

הערה - תבנית בינארית $f \in \text{Bil}(V, V)$ נקראת סימטרית אם $f(v, w) = f(w, v) \forall v, w \in V$.
 עבור F כזאת הווקטור $V \rightarrow F$ $q: V \rightarrow F$ (העצרת) $v \mapsto f(v, v)$ נקראת תבנית ריבועית.

למה - תהי $f \in \text{Bil}(V, V)$ ויהי B בסיס של V ויהי $A = [f]_B$. אז f סימטרית $\iff A = A^t$ (סימטרית)

למה - תהי $f \in \text{Bil}(V, V)$ סימטרית. אז:
 א - (למדת הקיטוב) $f(v, w) = f(w, v)$
 ב - אם $\text{char } F \neq 2$ ו- $f \neq 0$, אז יש $u \in V$ כך ש- $f(u, u) \neq 0$

משפט - תהי $f \in \text{Bil}(V, V)$ סימטרית. נניח $\text{char } F \neq 2$. אז קיים בסיס $B = (u_1, \dots, u_n)$ של V כך ש- $f(u_i, u_j) = 0$ $\forall i \neq j$.
 א - $[f]_B = \text{Diag}(c_1, \dots, c_n)$ כאשר $c_i = f(u_i, u_i)$
 ב - אם $V = \sum \mathbb{Z} u_i$, אז $f(v, w) = \sum_{i,j} a_{ij} b_i c_j$

מסקנה - תהי $A \in M_n(F)$ סימטרית ו- $\text{char } F \neq 2$. אז A חופפת למטריצה אלכסונית.

הערה - הדרגה $\text{rank } f$ של $f \in \text{Bil}(V, V)$ סימטרית היא הדרגה של המטריצה המייצגת את f לפי בסיס כלשהו של V .

משפט - יהי V מרחב וקטורי ממד n ויהי $f \in \text{Bil}(V, V)$ סימטרית. אז:
 א - יש בסיס של V כך שהמטריצה של f לפיו היא $D_r = \text{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_r, 0, \dots, 0)$
 ב - $\text{rank } f = r$ (ולכן D_r נקבע בוחצת f)

מסקנה - א - כל מטריצה סימטרית ממד n חופפת למטריצה יחידה מהצורה D_r .
 ב - תהי $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. אז A, B חופפות $\iff \text{rank } A = \text{rank } B$

משפט - יהי V מ"ו ממד n ו- $f \in \text{Bil}(V, V)$ סימטרית. אזי בסיס B כך ש- $[f]_B$ אלכסונית. אז יש לה p ריבועים חיוביים ו- q שליליים. אזי $\text{rank } f = p + q$ (המטריצה לפיו היא $D_{p,q} = \text{Diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_q, 0, \dots, 0)$)

תרגילי סיכום (צורה קבועה)

המשקל של קובסון: $\deg(q) = \deg(q^1, \dots, q^n) = q^n$

מטריצה של קובסון: $M = \begin{pmatrix} q^1 & \dots & q^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q^n & \dots & q^n \end{pmatrix}$

יחס בין מטריצה לזוגות $\leftrightarrow$ יחס בין מטריצה לזוגות

תכונות - אורך, סדר, חזקה, $\deg(q)$, $\deg(q^1, \dots, q^n)$, $\deg(q)$, $\deg(q^1, \dots, q^n)$

מטריצה - אורך, סדר, חזקה, $\deg(q)$, $\deg(q^1, \dots, q^n)$, $\deg(q)$, $\deg(q^1, \dots, q^n)$

משפט - משפט סימון

יהי V מרחב וקטורי מממד n מעל $\mathbb{R}$ ובה $f \in \text{Bil}(V, V)$ סימטרית.
 נניח ש- f מיוצגת על ידי המטריצה A בסיס $e_1, \dots, e_n$.
 אם P מטריצה אחרת, $D = P^{-1}AP$, אז D מיוצגת על ידי $P^{-1}AP$.
 כלומר: $P = S$, $q = t$.

הסקרה - תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית. אז:

- א - A חופפת למטריצה יחידה מהצורה $D_{P, q}$.
 - ב - אם A חופפת ל- $D_{P, q}$, נמצא $P^{-1}AP = q$ שזהו q המצוי ב- $D_{P, q}$.
- אם $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ סימטריות חופפות $\leftrightarrow$ יש להן אותה צורה ואותה חתימה.

הצורה - יהי V מרחב וקטורי מממד n מעל $\mathbb{R}$. $f \in \text{Bil}(V, V)$ סימטרית. נקראת:

- חתימה אם $f(v, v) \geq 0$ $\forall v \in V$.
- חתימה שלילית אם $f(v, v) \leq 0$ $\forall v \in V$.

משפט - V מרחב וקטורי מממד n מעל $\mathbb{R}$, $f \in \text{Bil}(V, V)$ סימטרית, $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה של f בסיס B .
 התנאים הבאים שקולים:

- (1) f חתומה.
- (2) A חופפת ל- $D = \text{Diag}(c_1, \dots, c_n)$ ש- $c_i \geq 0$ $\forall i$.
- (3) A חופפת ל- I_n .
- (4) $A = P^T P$ עבור $P \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה.
- (5) $\det(A) \geq 0$ (החתימה של A).
- (6) f היא מכפלה סקלרית על V .
- (7) שרשרת f_A ה- C הם ממטריים חתומים.

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \in M_k(\mathbb{R})$$

סימן - עבור $A \in M_n(\mathbb{R})$ נסמן $\text{sign}(A)$ מטריצה של A ונרשומה על A .
 נקראות החתימות הראשוניות של A .

משפט - תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית, ונניח $\det A_i \neq 0$ $\forall i$.
 אז A חופפת ל- $D_{P, q}$ כאשר q מספר החתימות החיוביות ו- P מספר החתימות השליליות.

תרגיל - $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 $f_{\lambda A}(x) = \lambda^* f_A(\lambda^{-1} x)$, $\sigma(\lambda A) = \begin{cases} \sigma(A) & \lambda > 0 \\ -\sigma(A) & \lambda < 0 \end{cases}$.

הצורה - שניונית (quadratic) x במרחב $\mathbb{R}^n$ היא קבוצה של $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ מהצורה $a + \sum_{i=1}^n 2b_i x_i + \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{ij} x_i x_j = 0$

1- a_{ij} לא יכולים להיות שווים, אבל שווים הם הפעמים מאחר ש $x_1, \dots, x_n$

נוסף להצורה $a_{ij} = a_{ji}$, וניתן לכתוב את הקשר הנ"ל כך:
 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$
 $a + 2u^T v + v^T A v = 0$

המטריצה המצומצמת של השניונית

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & u^T \\ u & A \end{pmatrix}$ מטריצת הנושים $\tilde{A}$ יקראו המטריצה המורחבת של השניונית.
 גם היא סימטרית.
 אפשר לכתוב גם $\begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}^T \tilde{A} \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = 0$

בעזרת שניונית -

שניונית במסלול אחד: נבחר במסלול אחד נוסף של $\mathbb{R}^n$ - B .
 נבחר P מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי ל- B (היא אורתוגונלית).
 אם $v = [v]_B$, אז נקבל:

$a + 2(P^T u)^T v + (v^T P^T A P) v = 0$
 נראה, נקבל שניונית חדשה עם $\tilde{A}' = \begin{pmatrix} a & u^T P \\ P^T u & P^T A P \end{pmatrix} = \tilde{P}^T \tilde{A} \tilde{P}$, $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$
 המטריצה המורחבת:
 ($\tilde{P}$ הפיכה ואורתוגונלית).

הצגת $w \in \mathbb{R}^n$: נניח שיש לנו ציר אחד w ונניח $v' = v - w$, אז:

$a + 2(u + w^T A w) v' + v'^T A v' = 0$
 נראה, נקבל שניונית חדשה עם $\tilde{A}' = \begin{pmatrix} a + 2u^T w + w^T A w & u^T + w^T A \\ u + A w & A \end{pmatrix} = \tilde{P}^T \tilde{A} \tilde{P}$
 כאשר $\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ הפיכה (אך לא אורתוגונלית).

הכפלה בקבוצה: נבחר את המשוואה השניונית בקבוצה $C \neq \emptyset$.
 המשוואה המתקבלת מתארת את C , והמטריצה המצומצמת והמורחבת היא $\tilde{A}$, $\tilde{A}'$.

סקנה - שניונית במסלול אחד: צירים אחדים מתארים את המשוואה השניונית C משוואה בקואורדינטות אחדות.
 אבל הצירים הקבועים אינם מותנים:

- 1) $\det(\tilde{A})$, $\det(A)$
- 2) $\text{rank}(\tilde{A})$, $\text{rank}(A)$
- 3) הסמן של $\tilde{A}$, A
- 4) ה- signature של A .

הכפלה ב- $C \neq \emptyset$ מותרת 1) ומכפלה את 4) ב- C .
 אם C היא שומרת 2) ב- -1 , ואם 3) ב- $(-1)^n$, בהתאמה.
 אם C היא מכפלה 2) ב- 1 , ואם 3) ב- $(-1)^{n+1}$, בהתאמה.

שאלה 8 - תהייה $x, x' \in \mathbb{R}^n$ שני וקטורים
 אז $x' = Mx$ מתקבלת
 כאשר $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \omega & \rho \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$
 מטריצה גוטיים בה $\rho \in M_n(\mathbb{R})$ אטורגונית ו- $\omega \in \mathbb{R}^n$
 הוכח כי $\tilde{A}' = \tilde{P}^t \tilde{A} \tilde{P}$ הוא המטריצה הנוצרת מהמטריצה $\tilde{A}$ על ידי טרנספורמציה גוטיים.

משפט - יהי X טופולוגי. נסמן $\tilde{r} = \text{rank}(\tilde{A})$, $\tilde{\sigma} = \sigma(A)$, $r = \text{rank}(A)$
 $\tilde{\sigma} = \sigma(\tilde{A})$ כאשר A מטריצה מרובעת $n \times n$ ו- $\tilde{A}$ מרחבת של A .

[illegible]

$$\phi = \begin{cases} 0 & \tilde{r} = r \\ \alpha > 0 & \tilde{r} = r+1, \tilde{\sigma} = \sigma-1 \\ \alpha < 0 & \tilde{r} = r+1, \tilde{\sigma} = \sigma+1 \\ 2\beta\chi_{r+1} & \tilde{r} = r+2 \end{cases}$$

- Green

תהי x שטחית, אם הממונים הנ"ל.

1 - ע"י סדרה של הצגות והכפלות ונבא שכל שורה לא תהיה שווה ל-0.

$$\phi = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_p x_p^2 + \lambda_{p+1} x_{p+1}^2 + \dots + \lambda_{p+q} x_{p+q}^2$$

ב - המשחק הנ"ל היא יחידה ~~במשחק~~ במובן הבא:

$p - q = | \sigma |$, $p + q = r$
 A zu $r \in \mathbb{Z}$, $\dots, \sigma_2, p, q, 0, \dots, 0 - 0$ $p \neq r \in \mathbb{R}$ v'
 $\phi = \begin{cases} 0 & \tilde{r} = r \\ +1 & \tilde{r} = r + 1, \sigma \neq 0, |\tilde{\sigma}| = |\sigma| - 1 \\ -1 & -1 - -1 - |\tilde{\sigma}| = |\sigma| + 1 \\ \pm 1 & -1 - \sigma = 0 \\ 2x_{p+q+1} & \tilde{r} = r + 2 \end{cases}$

תרד"ס -

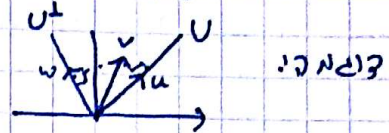
$\det \tilde{A} \neq 0$, $\det A \neq 0$, $\tilde{r} = n+1$, $r = n$, $\phi = -1$, $\phi = +1$

$\sigma = \sigma(A) > 0$ is $p \in \mathbb{N}$
 $\phi = -1$ SK, מס' שני $\det \tilde{A}$, $\det A$ $\rho \in \mathbb{N}$
 $\phi = +1$ SK, מס' שני $-11-$ -2
 $-d$

תוספות והשלמות

הטלה אור תצוגות

יהי V מרחב נ"ס מעל $F = \mathbb{R}$ ונניח $U \subseteq V$ תת מרחב.
 ראינו ש- $V = U + U^\perp$, דהיינו כל $v \in V$ קיימים ויחידים $u \in U$, $u^\perp \in U^\perp$ כ- $v = u + u^\perp$.
 הטלה אורתוגונלית של U בהיחס $U^\perp$ יחס העתקה היא $P_U: V \rightarrow U$ ושנית $P_U(v) = u$.



טענה - נניח $u_1, \dots, u_k \in U$ בסיס אורתוגנלי של U .
 אז:

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^k \frac{\langle u_i, v \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

מרחק

יהי V מרחב ויהי $U \subseteq V$ תת מרחב.
 המרחק בין $v \in V$ ל- U בהיחס $U^\perp$ מוגדר:

$$\text{dist}(v, U) = \inf_{u \in U} \|v - u\|$$

טענה - מתקיים $\text{dist}(v, U) = \|v - P_U(v)\|$

הטלה מטריות בחוג הפולינומים

משפט - יהי F שדה ויהי $R = F[x]$. יהי $\{g_i\}_{i \in I}$ אוסף של הפולינומים האי-פריקים ב- R .
 אז כל $f \in R$ יחיד $c \in R^* = F^*$ ו- 1 - $\exists m_i \in \mathbb{N}$ $\forall i \in I$ $f = c \prod_{i \in I} g_i^{m_i}$.
 כמעט כל c יחידים, כך ש:

$$f = c \prod_{i \in I} g_i^{m_i}$$

משט - יהי $f \in R[x]$ מתקן.

אם f אי-פריק $\leftrightarrow$ $f = x - \alpha$ $\alpha \in R$ א: 1
 א- $f = x^2 + bx + c$ $b, c \in R$ $b^2 - 4c < 0$ 2
 ב- $f = x^2 + bx + c$ $b, c \in R$ $b^2 - 4c > 0$ 3

דמיה - הטלה של $f \in \mathbb{Z}[x]$ מתקן, ויש $g \in \mathbb{Z}[x]$ מתקנים כך ש- $f = gh$.
 אם $f \in \mathbb{Z}[x]$ מתקן, ויש $g \in \mathbb{Z}[x]$ מתקנים כך ש- $f = gh$.
 אז $g \in \mathbb{Z}[x]$ מתקן, ויהי $h \in \mathbb{Z}[x]$ שמתקן h אז $h \in \mathbb{Z}$.

אופרטורים על כנסון מטריצה

- (1) נמצא פולינום אופייני $(f_A(x) = \det(xI - A))$
 - (2) אם יש לו אפסים לא רגילים, לא ניתן על כנסון (אבל ב-2)
 - (3) נחשב את ה- f_A (שורשי f_A)
 - (4) על אחת מהם, נמצא בסיס שמרחב העצמי (ע"י כתיבת המשוואות $(A - \lambda I)x = 0$)
 - (5) אם שבר ע"י הריבוי היטאומטרי קטן מהאמצע, לא ניתן על כנסון
 - (6) אם לא, נשים את x וקטורי הבסיסים ממצאן כעמודות P ונקבל $A' = P^{-1}AP$ אלסולר
 - (7) בעזרת ה- P של A' יופיע ה- f_A הוותאים ע"י בעמודה ה- i
- הערה - על כנסון אונטרי יט לקחת בסיס אורתונורמלי

אופרטורים על פנימיים מטריצה

- (1) נקח את איחוד הבסיסים שמרחבים העצמיים E ונעמידם על בסיס B (עם הבסיס המצטבר עוזב)
- (2) נשים את וקטורי B כעמודות P ונביט ב- $Q = P^{-1}AP$
- (3) נחזק מ- Q את החלק העשועשע כבר $(||E||$ העמודות והעורות הראשון)
- (4) נשלים את המטריצה Q שקבלנו ע"י P (ברחבטה)
- (5) נגדף את P חצה ע"י הספת וואו עמודות יעילות של I
- (6) נקבל $A' = P^{-1}P^{-1}APP$, מטריצה משועטית