

סיכום מעשטים עיקריים מרובות

הנצרת המרובת

הנצרה - $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, D קבוצה פתוחה, $z_0 \in D$
 f נצרה ב- z_0 אם הגבלת קיים:

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

$$\forall (\epsilon > 0), \exists (\delta > 0), \forall (h \in \mathbb{C}, 0 < |h| < \delta), \left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| < \epsilon$$

הנצרת המרובת מקיימת את כל התכונות הרגילות של נצרת.
 כל מעט שהפריק לצורות אפטר שהראת שני סצות α, β בכיוונים שונים, ולהראת שגבול הנצרת שווה.

משוואת קושי רימן

מעט - תהי f נצרה ב- z , כאשר $z = x + iy$, $f = u(x,y) + i v(x,y)$. אז:

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \rightarrow \text{אם משוואת קושי רימן (להפך, C-R)}$$

סערה - אם תחת סימוני המעט, אם u, v, u_x, v_x, u_y, v_y קיימות ורציפות ומקיימות C-R ב- z , אז f נצרה ב- z :

$$f'(z) = u_x(z) - i u_y(z)$$

סקנה - אם D תחום, $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ הומומורפית, ומתקיימים אחד מהבאים:

- (1) $\forall z \in D, f'(z) = 0$
 - (2) $f = u + i v$, $Re(f)$ קבוע
 - (3) f ודל קבוע
- אז f קבועה.

שירת צוית

הנצרה - מסירה היא $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה.
 היא ~~נצרה~~ נצרה אם החלק הממשי והמזוה נצרה.
 היא רגורית אם $\gamma'(t) \neq 0$ אם היא נצרה ו- $\gamma'(t_0) \neq 0$

(סל) הטו קאר ההיתת המטיק γ וכווננו $Arg(\gamma'(t_0))$

סקנה - תהי $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ הומומורפית, $z_0 \in D$, $f'(z_0) \neq 0$.
 יהי γ_1, γ_2 עקומות רגוריות ב- z_0 , כך ש- $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$.
 אז הצוית בין γ_1 ו- γ_2 היא 0 (החיתוך) ו- 2π (החיתוך).
 הצוית בין γ_1 ו- γ_2 היא 0 (החיתוך) ו- 2π (החיתוך).

טמר ט - משמרת צוית, או קונפורמית.

הצטרפות מוביוס

הזכרה - הצטרפות מוביוס היא הצטרפות
 $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$
 כאשר $(c, d) \neq (0, 0)$, $ad-bc \neq 0$

+ תנאים אלו מבטיחים שההצטרפות היא קבוצה.

תכונות - (1) כל הצטרפות מתאימה למטריצה
 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ מתקיים $(h_A)^{-1} = h_A$

בפרט, כל הצטרפות מוביוס היא הפיכה.

(2) אם $h \neq 1$ בכל נקודה בה היא מוגדרת $(z \neq -\frac{d}{c})$

(3) אם $A \neq I$ יש ל- h_A נק' שבתה ∞ אם $c=0$,
 ואחרת יש לה נק' שבתה 1 או 2 בה $c \neq 0$.

(4) הצטרפות מוביוס נקבעת ביחידות $e^{\pm i}$ 3 נקודות

(5) מעבר מופעל זה מעבר או ישר
 הצטרפות מוביוס מעבירות מעבירים מופעלים מופעלים

(6) אם $h: D \rightarrow \mathbb{C}$, אז $h(0) = h(2\pi)$
 (כלומר, הצטרפות מוביוס מעבירות שפה לעברה)

פונקציות אלמנטריות

הזכרה - $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

טענה - אלו הרחבת הוואריאטיות של הפונקציות הרגילות. כלומר, הערכים $\mathbb{R}$
 הם כרטיס, והפונקציות הוואריאטיות.

תכונות - (1) מתקיימות התכונות הרגילות של e^z שאנחנו מכירים מ- $\mathbb{R}$

(2) $\sin, \cos$ פגו חסמות

(3) $\sin, \cos$ מחזוריות 2π , e^z מחזוריות $i2\pi$

(4) e^z מעבירה ישרים $x = x_0$ e^z מעבירים גרזנים $y = y_0$
 וישרים $y = y_0$ e^z מעבירים בזויות $x = x_0$.

$$\text{Log}(z) = \ln|z| + i \text{Arg}(z)$$

$$e^{\text{Log}(z)} = e^{\ln|z|} \cdot e^{i \text{Arg}(z)} = |z| \cdot e^{i \text{Arg}(z)} = z$$

Log כרטיס $\mathbb{C} \setminus [-\infty, \infty]$ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

ערכים

הכזרה - g הפכה יחידת f אם $f(g(z)) = z$ לכל z בתחום D .

אם g הפכה יחידת f ב- D ורציפה, אז g סגל של f^{-1} ב- D .

ציוטאות - $\log(z)$ ב- $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ סגל של $(e^z)^{-1}$.

- $f(z) = \sqrt[n]{z}$, $g_1 = f$, $g_2 = -g_1$ ערכים של f^{-1} ב- $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

טענה - $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ הומומורפית, g סגל של f^{-1} ב- D .

תהא $z \in D$, $w = g(z) \in \mathbb{C}$, $f'(w) \neq 0$. אז אם g סגורה ב- z ומתקיים $g'(z) = \frac{1}{f'(w)}$.

טענה - כל הערכים של $(e^z)^{-1}$ הם:

$$\ln|z| + i(\text{Arg}(z) + 2\pi k)$$

טענה - $f(z) = z^p$. כל הערכים של f^{-1} הומומורפים, והם מהצורה:

$$g = \sqrt[p]{r} \cdot e^{i \frac{\text{Arg}(z)}{p}} \quad (p^{\text{ער}} = 1)$$

כאשר $\sqrt[p]{r}$ שורט יחידה של p .

הזרה - אם באן הפתוח הוא $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

האינטגרל המרוכב

הכזרה - $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ רציפה. $\int_a^b \gamma(t) dt = \int_a^b \text{Re}(\gamma(t)) dt + i \int_a^b \text{Im}(\gamma(t)) dt$.

תכונות - כל התכונות של אינטגרל ממשי. בפרט:

- (1) עיגוליות
- (2) ניוטון-לייבניץ
- (3)

$$\left| \int_a^b \gamma(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma(t)| dt$$

הכזרה - $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ מסלול בעצמה רציפה, γ מוגדרת $\text{Im}(\gamma)$ ורציפה.

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

תכונות - (1) עיגוליות (2) ג- f (3) ג- γ

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt \quad (2)$$

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_t |f(\gamma(t))| \cdot \text{Len}(\gamma) \quad (3)$$

$\text{Len}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

(4) ניוטון-לייבניץ - γ פתוחה, $f \in \text{Hol}(\gamma)$, $\gamma \in G$, $F'(z) = f(z)$.

$$\int_{\gamma} f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

(5) אם $f_n \rightarrow f$ במובן של L^1 : $\int_{\gamma} f_n \rightarrow \int_{\gamma} f$

(6) אם $f \in \text{Hol}(G)$ ו- $F' = f$ רציפה, ו- γ מסלול סגור, אז $\int_{\gamma} f dz = 0$.

משקנה - $f: G \rightarrow C$ רציפה, הומומורפיזם - G ו- $Hol(G)$ שווה.

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{|z-z_0|=r} |f(z)|$$

מעטפת עיבוד - תהי $f \in H^1(\Omega)$. אז אם f חסומה, f קבועה.

משפט יחידות II - G תחום, $f \in \text{Hol}(G)$ נניח שיש $\{z_n\} \subset G$ כך ש-
 $\forall n, z_n \neq a, z_n \rightarrow a \in G$ ו- $f(z_n) = 0, n \in \mathbb{N}$ אז $f \equiv 0$

ע'קרון העקסימאם - יהי G פתום. אם $|I|$ מקסימאם מקומי, $z_0 \in G$, אז $z_0 \notin \partial G$.

$\lambda \in \mathbb{C}$ و $z \in \mathbb{D}$ $|f(z)| = |\lambda z|$ - و $z \in \mathbb{D}$ $|f'(z)| = |\lambda|$ $|f'(0)| \leq 1$ (2)
 $f(z) = \lambda z$ - و $z \in \mathbb{D}$ $|f'(z)| = |\lambda|$ $|f'(0)| = 1$ $\lambda = 1$ (3)

צוהי התקרה חתך וזה $\psi_a: 0 \rightarrow 0$, וכך התקרה חתך וזה אף תחום זה.
היא מהצורה הנכונה.
מתקיים בנוסף:

$$\begin{aligned} \gamma_a(a) &= 0 \\ \gamma_a'(0) &= 1 - |a|^2 \\ \gamma_a'(a) &= \frac{1}{1 - |a|^2} \end{aligned}$$

טורי פארן

הפצרה - תהי $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ סדרה. (כאן $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n$)
 טור פארן סביב $z_0 \in \mathbb{C}$ הוא $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{+} + \sum_{-}$

נאמר שהטור מתכנס אם $\sum_{+}$ ו- $\sum_{-}$ מתכנסים.

(גזיר - $R_{+} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}$, $R_{-} = \lim_{n \rightarrow -\infty} |a_{-n}|^{1/n}$)

אם $R_{+} > R_{-}$ נגזיר את טבעת ההתכנסות:
 $A = A_{z_0}(R_{-}, R_{+}) = \{z \in \mathbb{C} \mid R_{-} \leq |z - z_0| \leq R_{+}\}$

משפט פורן I - נתון טור פארן $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ סביב $z_0 \in \mathbb{C}$. טבעת ההתכנסות.

- (1) הטור מתבדר ב- $\mathbb{C} \setminus A$
- (2) אם $R_{+} > 0$, $\sum_{+}$ מתכנס במחט מקומית, ובהחלט ב- $D_{z_0}(R_{+})$
- (3) אם $R_{-} > 0$, $\sum_{-}$ מתכנס במחט מקומית, ובהחלט ב- $\mathbb{C} \setminus D_{z_0}(R_{-})$
- (4) אם $R_{+} > R_{-}$, הטור מתכנס במחט מקומית ובהחלט ב- A .
 סכומו פני הומומורפיה f , ובטעם:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \forall r \in [R_{-}, R_{+}]$$

משפט פורן II - תהי $f \in H_0(A_{z_0}(a, b))$, $0 < a < b$.
 אז יש פיתוח פורן:

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

וההתכנסות היא במחט מקומית, בהחלט מתקיים:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \forall r \in (a, b)$$

נק סינולריות

נסמן ב- $D_{z_0}^*(r)$ את הדיסק המעוקר ברדיוס r סביב z_0 .

נק סליקה - z_0 סינולריות סליקה אם יש המשכה הומומורפית f ב- $D_{z_0}(r)$.
 במקרה זה, לכל $n < \infty$, בטור פורן של f , $a_n = 0$.

משפט המשכה של רימן - $f \in H_0(D_{z_0}^*(r))$. סליקה $\leftrightarrow$ f חסומה ב- $D_{z_0}^*(r)$, $0 < r < \infty$.

מסקנה - z_0 סליקה $\leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ קיים וסופי.

נק סינולריות עיקרית - z_0 סינולריות עיקרית אם יש אינסוף א-מ טיפיים סביב z_0 .
 z_0 סינולריות עיקרית $\leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ לא קיים.

משפט ססקי ווירטואוס - $f \in H_0(D_{z_0}^*(r))$ ו- z_0 סינולריות עיקרית.

כל $f(D_{z_0}^*(r))$ מכיל ∞ אם $z \in \mathbb{C}$ יש $\{z_n\} \subseteq D_{z_0}^*(r)$ כך ש- $z_n \rightarrow z_0$, $f(z_n) \rightarrow \infty$.

קוטב - z_0 קוטב אם יש מ כך ש $a-n > 0$,
 נאמר ש- z_0 קוטב מסדר m .
 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ קוטב של f איננו

טענה - אם z_0 קוטב מסדר m של $f \in \text{Hol}(D_{z_0}^*(r))$ ש
 אז קיימת $g \in \text{Hol}(D_{z_0}(r))$ כך ש-

$$f = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

אם - אם $f \in \text{Hol}(G)$, $f \neq 0$, אז נ"ק $a \in G$ נקראת אפס של f אם $f(a) = 0$
 והריבוי של a הוא $\min \{n \in \mathbb{N} \mid f^{(n)}(a) \neq 0\}$

טענה - אם a אפס של $f \in \text{Hol}(G)$ מריבוי m , אז

$$f(z) = (z-a)^m g(z)$$
 כאשר $g \in \text{Hol}(G)$ ו- $g(a) \neq 0$

משפט - (1) אם f יש אפס מריבוי m ב- z_0 אז f יש קוטב מסדר m ב- z_0
 (2) אם f יש קוטב מסדר m ב- z_0 אז f יש אפס מריבוי m ב- z_0

אינטגרל של מסלול

דוגמה - תהי $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ מסלול.
 אז יש פונקציה רציפה $\theta: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $\theta(t) \in \arg(\gamma(t))$ $\forall t \in [a,b]$.

טענה - אם γ חלקה עיקולטית אז

$$\psi(t) = \text{Log}(\gamma(t)) + \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)} ds$$

היא בחירה רציפה של γ מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{C}$ כעומת:

$$\gamma(t) = e^{i\psi(t)}$$

הערה - תהי $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ עקומה סגורה.

$$\text{Ind}_\gamma(0) = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} = \frac{\psi(b) - \psi(a)}{2\pi i}$$

תהי $z \notin \gamma$ נציג $\gamma_z(t) = \gamma(t) - z$ אז:

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \text{Ind}_{\gamma_z}(0)$$

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

משפט -

תכונות - (1) אם $U = \mathbb{C} \setminus \gamma$

$$\text{Ind}_\gamma(z) = -\text{Ind}_{-\gamma}(z)$$

$$\text{Ind}_\gamma(z) = \text{Ind}_\gamma(z)$$

$$0 = \text{Ind}_\gamma(z)$$

(2) קבוע γ הרכב קטירות של U .
 (3) $0 = \text{Ind}_\gamma(z)$ הרכב קטירות האט חסם של U .

נוסחת קושי הכללית - $f \in \text{Hol}(G)$, G תחום קמור, $\gamma \subset G$ מסלול סגור.

$$\forall z \in G \setminus \gamma. \text{Ind}_\gamma(z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

312, 23112 866, 74461(66), 7707 6, 912, 2118

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

משפט - f חציפה בתחום G .
 $\int_G f = 0 \iff f$ יט קצויה ב- G $\longleftrightarrow$ $\nabla u = f$ סארו

log '21r

היא צורה - תהיה $f \in \text{Hol}(G)$, G תחום, $\log f(z)$ יש בול $\text{Hol}(G)$ קרן.

$$\forall z \in G, \quad e^{f(z)} = f(z)$$

הערה - תנאי הכרחי - $\forall z \in G, f(z) \neq 0$

משפט - $\text{Hom}(G)$ חסרת אפסים
אם קיים i כך ש- G אינה רצויה:

$$\text{Ind}_{\text{for}}(0) = 0$$

כסומה - ערש סארה, $f(x)$ "לא מקיפה את הראשית".

מסקנה - אם $0 \neq G \subset \mathbb{C}$ של $\mathbb{C}$ על $\log z$ אנה סדרס וגאסס ארה $\text{Ind}_g(0) = 0$

[illegible]

$$\text{Ind}_{\text{for}}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

שאריות

הצגה - תהי $f \in H_0(D_{2_0}^*(r))$, אז $\bar{f}$ פיתוח לורן

$$f_{\in S_{2_0}(f)} = \alpha_{-1} \cdot \frac{z_0}{z - z_0} + \dots$$

המאית של f (המקצם של $\bar{f}$)

7- י"ט קולב 1970 מ' 2-70, 510

$$R_{f, z_0}(f) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-z_0)^n f(z) \right]$$

מחשב המאמרים - $Hash(E)$ נט - G תחום E - E קבוצה סוביט טע נק סינאלריות .
תבי E GA r מסלה סאד כוניה G ,
אנ'

$$\int_{\gamma} f = 2\pi i \sum_{\text{Poles}} \text{Res}_z(f)$$

