

סכימה ע"פ אבס

הצורה - נאמר שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס ע"פ אבס אם קיים הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum a_n x^n = L$$

ומסתמ' $L = (A) \sum a_n$

* הערה - טור מתכנס $\leftarrow$ מתכנס ע"פ אבס. לא עובד הפוך, למשל טור $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

תרגיל - פוסט מוסר, מסמך

תהי $\sum a_n$ סדרה אי-שלילית. נניח שקיים וסופי הגבול:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

הוכיחו מהטור $\sum a_n$ מתכנס ע"פ L.

פיתוח: סדרת הסכומים החלקיים של $\sum a_n$ מונוטונית עולה (כי $a_n \geq 0$) ולכן מספיק להוכיח שהיא חסומה.

$$\sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=0}^N a_n \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^N a_n x^n \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = L$$

סכימה ע"פ צ'ארל

הערה - תהי $\{a_n\}$ סדרה נאמר שיש לה גבול ע"פ צ'ארל אם קיים הגבול

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N C_n$$

תהי $\sum a_n$ טור. נאמר שהוא מתכנס ע"פ צ'ארל אם קיים הגבול

$$(c) \sum a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_N}{N+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \sum_{n=k}^N a_n$$

* הערה - נזכור שגם $C_n \rightarrow L$ אזי $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^N C_n \rightarrow L$ כלומר התבוננו בגודל התיכנסות ע"פ צ'ארל, לא בכיוון ההפוך. צומת: מיוס

משפט - יהי $\sum a_n$ טור סכום ע"פ צ'ארל, אזי הן סכום ע"פ אבס וכן $\sum a_n = (A) \sum a_n$ (א)

משפט - נניח שהסכום $\sum a_n$ סכום ע"פ אבס, כלומר קיים הגבול $\sum a_n x^n = f$ $\lim_{x \rightarrow 1^-}$ (נניח $a_n = 0$ או $a_n = \frac{1}{n}$) אזי $\sum a_n = f$

תרגיל - אם טור $\sum a_n$ מתכנס ע"פ צ'ארל אזי $\frac{a_n}{n} \rightarrow 0$

פיתוח - נסמן $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$ ו- $b_n = \frac{s_0 + \dots + s_N}{N+1}$

קיימי הטור מתכנס ע"פ צ'ארל $L = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = \left(\sum_{k=0}^{n+1} S_k - \sum_{k=0}^n S_k \right) - \left(\sum_{k=0}^n S_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k \right) =$$

$$= (n+1)b_{n+1} - nb_n - nb_n + (n-1)b_n \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L - 2L + L = 0$$