

משפט דיריכלה - יהי Q טבעי $Q \geq 2$, ויהי $\theta \in \mathbb{R}$
אז יש מספר טבעי $q < Q$ ושלם p קטן -

$$(*) \quad |q\theta - p| \leq \frac{1}{Q}$$

בהזמרת אופים, $(*)$ שקול ל:

$$|\theta - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{qQ}$$

$$(\text{ואכן } |\theta - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2})$$

תצבות מחצאי 1 - הרציונלים צפופים ב- $\mathbb{R}$. כלומר לכל $\theta \in \mathbb{R}$ ו- $\epsilon > 0$
יש $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ כך ש- $|\theta - \frac{p}{q}| < \epsilon$

$$|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$$

בהוכחה נקבל מהמשפט דיריכלה קבל קירוב חזק יותר טוב.

הוכחה - נסמן עבור $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$, $\{x\} = x - [x]$

נחלק את $[0, 1]$ ל- Q קטעים באורך $\frac{1}{Q}$:

$$[0, 1] = [0, \frac{1}{Q}) \cup [\frac{1}{Q}, \frac{2}{Q}) \cup \dots \cup [1 - \frac{1}{Q}, 1]$$

המספרים $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_Q$ מספרים $Q+1$ שונים

מוכנים בחלוקה זו ל- Q תתי קטעים.

לפי עיקרון שובר היונים יש $0 \leq j < i \leq Q$ כך ש- $\{\theta_j, \theta_i\}$ שייכים לאותו תת-קטע

$$\{\theta_i\} = i\theta - p_i, \quad p_i \in \mathbb{Z}$$

$$p_i, p_j \in \mathbb{Z}, \quad \{\theta_j\} = j\theta - p_j, \quad p_j \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{Q} \geq |\{j\theta\} - \{i\theta\}| = |j\theta - p_j - (i\theta - p_i)| =$$

$$= |(j-i)\theta - (p_j - p_i)| = |q\theta - p|$$

$$p_j - p_i = p \in \mathbb{Z}, \quad q = j-i \leq Q$$

נסמן

מסקנה - אם $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, אז יש אינסוף רציונלים מוצמצמים $\frac{p_k}{q_k}$ שמקיימים:

$$|\theta - \frac{p_k}{q_k}| \leq \frac{1}{q_k^2}$$

עתי נבנה באינדוקציה אינסוף פתרונות שונים לאי-השוויון $|\theta - \frac{p_k}{q_k}| \leq \frac{1}{q_k^2}$

את הראשון נבנה באמצעות משפט דיריכלה עם $Q=2$. נניח שמצאנו $\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}$ נבחר Q מספיק גדול כך ש- $\frac{1}{Q} < \min |q_j\theta - p_j|$

נבדוק את משפט דיריכלה עם Q זה ונקבל פיתרון נוסף וכו'.

דוגמה - עבור $x = \pi$, הקרובים יהיו מקיימים את המסקנה הקודמת:

$$\pi \approx 3, 3\frac{1}{7}, 3\frac{15}{106}, 3\frac{16}{113} \rightarrow 3.14159292... \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 3.1428... \quad 3.14159265... \quad 3.14159292...$$

מטרתנו כעת - למצוא דרך מפורשת לכתוב קרובים כאלה נשתמש בשברים מתואמים, ביטויים מהצורה:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}} \quad a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}, i \geq 1$$

אין מנעים עזה בכלל? אם אלא ריתם איקסצס. אלא ריתם איקסצס על q, p (הנחה ש- $p < q$)! נחלק ב- p :

$$q = ap + r$$

$$\frac{q}{p} = a + \frac{r}{p}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a + \frac{r}{p}}$$

או:

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}} \quad \text{נמשך עם האלא ריתם, ונקבל:}$$

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} \quad \text{כמו כן, לא כיוונו. אפשר לרשום בצורה}$$

(בשני הביטויים, $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$)

סימון - הביטוי לטורים מתואמים של $\frac{p}{q}$ הוא $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$

לענה - אם $a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_m}}}$, היתאים על a_i ב- b_i מתקיים.

אז אם שמתקיים $m=n$, $\forall i \ a_i = b_i$, $a_m = b_m - 1$, $b_{m+1} = 1$, $a_{m+1} = 1$, $a_m = b_m - 1$, $a_0 = b_0, \dots, a_{m-1} = b_{m-1}$ או שמתקיים $n=m+1$

$$3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{2}} = 3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1}}} \quad \text{דוגמה -}$$

הוכחה - נניח שהתקרה הראשון של מתקיים $(a_i), (b_i)$ (כאן עלתה) ונכיר שהתקרה השני מתקיים באינדוקציה על m . הננין בעצמך הבטא.

$$a_0 = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_n}}}$$

$$B = 1 \quad \text{הכנסה } a_0 = b_0 + 1$$

המשק הנוחה - אם $m=0$, מקבלים

$$B \in (0, 1]$$

אם הביטויים שונים אז
 $b_1 = 1, n=1$ כלומר

אם $m > 1$, ריטואל

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_m}}} = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \dots + \frac{1}{b_n}}}$$

$B \in (0, 1) \leftarrow$ הביטוי אינו 1 כי $m \geq n$ כלומר המכנה גדול מ-1.

קיימים $b_0 = \lfloor x \rfloor$ ו- $a_0 = \lfloor x \rfloor$ אופן

במקרה $a_0 = b_0$ ואם $A=B$ ניתן פירוט גם בתור:

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_m}}} = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{b_3 + \dots + \frac{1}{b_n}}}$$

זהו שיוויון בין שני ביטויים קטנים יותר, וממשיכים באינדוקציה.

$$cf: \left\{ [a_0, a_1, \dots, a_n] \mid \begin{array}{l} n \in \mathbb{N}_{\geq 0} \\ a_0 \in \mathbb{Z} \\ a_i \in \mathbb{N} (i \geq 1) \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{Q} \quad \text{מסקנה - נגזיר}$$

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}} \quad \text{ההצגה שמגדירה את } [a_0, \dots, a_n] \text{ פססור}$$

הצגה זו היא 2-ס-1, וזו.

cf - continued fractions, שלבים ממשלתיים.

$$p_{-1} = 1, p_{-2} = 0, q_{-2} = 1, q_{-1} = 0 \quad \text{נמנה - מסלול}$$

בהינתן $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ נגזיר נוסחאות נסיגה:

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= a_{k+1} p_k + p_{k-1} \\ q_{k+1} &= a_{k+1} q_k + q_{k-1} \end{aligned} \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$\begin{bmatrix} p_{k+1} & p_k \\ q_{k+1} & q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_k & p_{k-1} \\ q_k & q_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{בכתיבה מטריצית:}$$

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n] \quad \text{אז}$$

$$\gcd(p_n, q_n)$$

ונשקף זה מצמצם הוא

הוכחה - באינדוקציה על n . (בסיס תחתון, $n=0$)
 נסמן $\frac{\tilde{p}_{n-1}}{\tilde{q}_{n-1}} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ (שבר מצמצם מנוסח של שברים מנוסחים)

$$\frac{\tilde{p}_n}{\tilde{q}_n} = a_0 + \frac{1}{\frac{\tilde{q}_{n-1}}{\tilde{p}_{n-1}}} = a_0 + \frac{\tilde{q}_{n-1}}{\tilde{p}_{n-1}} = \frac{a_0 \tilde{p}_{n-1} + \tilde{q}_{n-1}}{\tilde{p}_{n-1}}$$

נשים לב -

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_n \\ \tilde{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p}_{n-1} \\ \tilde{q}_{n-1} \end{bmatrix}$$

כלומר:

אם היה $\tilde{p}_{n-1}$ ו $\tilde{q}_{n-1}$ מסתכלים לא טריוויאלי של $\tilde{p}_{n-1}$ ו $\tilde{q}_{n-1}$ סביר.
 אז הוא היה מסתכל מסתכל של $\tilde{p}_{n-1}$ ו $\tilde{q}_{n-1}$ סביר.

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_n \\ \tilde{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

אז אפשר לרשום:

$\begin{bmatrix} \tilde{p}_n \\ \tilde{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{n-1} \\ \tilde{q}_{n-1} \end{bmatrix}$ "מהות" באינדוקציה

לכן, $\tilde{p}_n$ ו $\tilde{q}_n$ מקדקת עמודה יחידית ושלילית קבוצה:

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_n & \tilde{p}_{n-1} \\ \tilde{q}_n & \tilde{q}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} a_n & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{\tilde{p}_{n-1}}{\tilde{q}_{n-1}} = [a_0; a_1, \dots, a_n] \right)$$

$$= \begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{bmatrix}$$

מסתכלת הנסיגה

משפט - $\det \begin{bmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{bmatrix} = \pm 1$, $n \geq 0$

יש: ק"מ $q > 1$, $C > 0$ כך שלכל n , $q_n \geq C \lambda^n$

$$\begin{bmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots \begin{bmatrix} a_{n+1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

הוכחה - א - באינדוקציה

$$\det \begin{bmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{bmatrix} = (-1)^{n+2} \text{ וכן, } n=0,1$$

ג - נבחר λ כך ש- $\lambda^2 < 2\lambda + 1$, $\lambda > 1$. נבחר באינדוקציה.

נבחר קבוע C כך ש- $q_n \geq C \lambda^n$ $n=0,1$

$$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1} \geq q_n + q_{n-1} \geq C(\lambda^n + \lambda^{n-1})$$

ולכן

משפט - נניח $a_0 \in \mathbb{Z}$, ו $a_i \in \mathbb{N}$ $i \geq 1$. קיים הקדום:

$$[a_0, a_1, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0, a_1, \dots, a_n]$$

הוכחה - המסקנה בעמוד הקודם.

הוכחה - נסמן $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$

$$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \left| \frac{p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1}}{q_nq_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n + q_{n-1})} \leq \frac{1}{q_n^2} \leq \frac{1}{c^2 \lambda^{2n}}$$

↑
מספר קרובות

$$\left| \frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \left| \frac{p_{n+k}}{q_{n+k}} - \frac{p_{n+k-1}}{q_{n+k-1}} \right| + \dots + \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{\lambda^{2n}} + \frac{1}{\lambda^{2n+2}} + \dots + \frac{1}{\lambda^{2(n+k-1)}} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{c^2} \sum_{i=n}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda^{2i}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

↑
צבוע סכום אינסוף מתכנס

קבלנו העתקה (נמשך לקראת CF) ששוחזרה כל סדרה (סופית או אינסופית) של מספר ממשי. נראה מיד של המספרים האי-רציונליים הם התמונה תחת CF של הסדרה האינסופית, ו-CF חוזר על סדרת אינסופיות. כדומר נוכיח:

מטרה - לכל $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ יש סדרה $a_0, a_1, \dots$ ו- $a_0 \in \mathbb{Z}$ ו- $a_i \in \mathbb{N}$ ו- $i \geq 1$ המקיימת:

אם $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ אז $\frac{p_n}{q_n} < \alpha$

$$\dots < \frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} < \dots < \alpha < \dots < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} < \frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}} < \dots$$

(כפרט, מאחר טקוים $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha$ אז $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \alpha$)

$$\frac{1}{a_{n+2}q_n^2} > \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| > \frac{1}{(a_{n+2}+2)q_n^2}$$