הצגות של חבורות סופיות

ⓒ ארזים

29 בדצמבר 2016

משפט 0.1 (פרובניוס) תהי G חבורה סופית, $H \leq G$ כך שלכל $t \in G \backslash H$ מתקיים

$$H \cap tHt^{-1} = \{1\}$$

אזי

$$N = \left(G \backslash \bigcup_{g \in G} \left(gHg^{-1} \right) \right) \cup \{1\}$$

אזי $N \lhd G$.

הוכחה: נרצה להראות כי עבור ההצגה הרגולרית ρ של H, ניתן להמשיך (במובן המתאים) את ρ לכל G, כך שעבור ההצגה החדשה, הגרעין הוא בדיוק N.

עבור כל פונקציית מחלקה f על H נוכל להגדיר $\overline{f}$ פונקציית מחלקה יחידה על G המרחיבה את f ומקיימת שלכל $x \in N$ מתקיים

$$\overline{f}(x) = f(1)$$

נרצה להראות שמתקיים

$$\overline{f} = \mathrm{Ind}_H^G f - f(1) \cdot \left(\mathrm{Ind}_H^G (1) - 1 \right)$$

נוכל לכתוב לכל $h \in H$

$$\left(\mathrm{Ind}_H^G f \right)(s) = \frac{1}{|H|} \sum_{t \in G} f\left(t^{-1} s t \right)$$

$$\overline{f}(h) = f(h) = \mathrm{Ind}_H^G f(h) - f(1) \left(\mathrm{Ind}_H^G (1)(h) - 1 \right)$$

נרצה לבדוק מתי h מייצב קוסט:

$$h\lambda H = \lambda H \iff \lambda^{-1} h \lambda \in H \iff \lambda \in H$$

לכן $\mathrm{Ind}_H^G(1)$, כמות נקודות השבת, תהיה 1, ולכן הגורם הימני יתאפס ונקבל את השוויון שרצינו עבור איברי H. כעת, לכל $n\in N$ הגדרנו

$$\overline{f}(n)=1$$

נבדוק:

$$\left(\mathrm{Ind}_H^G f\right)(n)-f(1)\left(\mathrm{Ind}_H^G(1)(h)-1\right)=f(1)$$

ולכן קיבלנו את השוויון כמו שרצינו.
נטען מעט על הגדלים של דברים:

$$\left|\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}\cup\{1\}\right|=1+[G:H](|H|-1)=1+|G|-[G:H]$$

$$\left|G\backslash\left(\bigcup_{g\in G} gHg^{-1}\cup\{1\}\right)\cup\{1\}\right|=[G:H]$$

כעת, נחשב וניווכח כי

$$\langle f_1,f_2\rangle_H=\left\langle\overline{f_1},\overline{f_2}\right\rangle_G$$

מתקיים

$$\langle f_1,f_2\rangle_H=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}f_1(h)\overline{f_2(h)}$$

$$\left\langle\overline{f_1},\overline{f_2}\right\rangle_G=\frac{1}{|G|}\left(\sum_{n\in N}\overline{f_1}(n)\overline{\overline{f_2}(n)}+\sum_{1\neq h\in H}\sum_{t\in G/H}\overline{f_1}\left(tht^{-1}\right)\overline{\overline{f_2}\left(tht^{-1}\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{|G|}\left(\frac{|G|}{|H|}f_1(1)\overline{f_2(1)}+\sum_{1\neq h\in H}\frac{|G|}{|H|}f_1(h)\overline{f_2(h)}\right)=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}f_1(h)\overline{f_2(h)}$$

אם f פונקציית מחלקה שמתמאימה להצגה אי פריקה של H,

$$\overline{f}=\sum_{\chi}\alpha_\chi\cdot\chi$$

כאשר α_χ כולם שלמים, בגלל הנוסחה שראינו קודם. כעת,

$$\sum\alpha_\chi^2=\left\langle\overline{f},\overline{f}\right\rangle_G=\langle f,f\rangle=1$$

מכאן קיים χ אי פריק יחיד עבורו $\alpha_\chi = \pm 1$. הוא לא -1, שכן $\overline{f}(1) = f(1) > 0$, ולכן $\overline{f}$ היא כרקטר אי פריק של G.

לכן כרקטר של כל הצגה מורחב לכרקטר של הצגה כלשהי. כעת,

$$\overline{f}(n) = f(1)$$

לכל $n \in N$. בצד שמאל מדובר בעקבה של אופרטור ממימד סופי, ולכן זהו סכום של שורשי יחידה - והוא שווה למימד אם ורק אם כל שורשי היחידה הם 1. לכן $N \subseteq \ker \overline{\rho}$ עבור ההצגה ρ שמתאימה לפונקציה f.

נוכל בפרט להרים את ההצגה הרגולרית $\rho : H \to GL(V)$, שהיא נאמנה. כל מה שמחוץ לקבוצה N יפעל לא טריוויאלית, כי הוא צמוד אל H, ולכן פועל נאמנה. לכן $\ker \overline{\rho} = N$, וקיבלנו שאכן N תת חבורה נורמלית של G. ■