<u>הצגות של חבורות סופיות</u>

ⓒ ארזים

15 בדצמבר 2016

1 דוגמאות

נמשיך בסדרת הדוגמאות שלנו.

1.1 A_4

נסמן

$$\begin{aligned}
x &= (a,b)(c,d)\\
y &= (a,c)(b,d)\\
z &= (a,d)(b,c)\\
H &= \{1,x,y,z\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2\\
t &= (a,b,c)\\
K &= \{1,t,t^2\} \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

מתקיים

$$\begin{aligned}
H &\lhd A_4\\
HK &= A_4\\
H \cap K &= 1
\end{aligned}$$

אלה בדיוק התנאים של מכפלה חצי ישרה:

$$A_4 \cong H \rtimes K$$

מחלקות הצמידות:

$$\{1\}, \{x,y,z\}, \{t,xt,yt,zt\}, \{t^2,xt^2,yt^2,zt^2\}$$

הצגות של K:

$$t\to 1, t\to\omega, t\to\omega^2$$
$$\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

ההצגה הנותרת של A_4 היא צמצום ההצגה הטבעית של S_n. טבלת כרקטרים:

מחלקות\הצגות	1	x	xt	xt^2
ψ_0	1	1	1	1
ψ_1	1	1	ω	ω^2
ψ_2	1	1	ω^2	ω
τ	3	-1	0	0

נוודא שההצגה τ אי פריקה -

$$\|\tau\|^2=\frac{1}{12}(9+3+0+0)=1$$

נראה את τ כהצגה מושרית. היא נמצאת במרחב

$$V=\left\{x\in\mathbb{C}^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4=0\right\}$$

נתבונן בתת הצגה:

$$W=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

מרחב זה אינווריאנטי לחבורה H. כמו כן,

$$V=W\oplus tW\oplus t^2W$$

ולכן V מושרית על ידי ההצגה במרחב W של H. הכרקטר של ההצגה במרחב W הוא:

$$\chi(1)=\chi(x)=1$$
$$\chi(y)=\chi(z)=-1$$

נחשב את הכרקטר לפי ההשרייה.

$$\psi(x)=\chi(x)+\chi\left(t^{-1}xt\right)+\chi\left(t^{-2}xt^2\right)=$$
$$=1+\chi(y)+\chi(z)=-1$$

שאר החישובים כמובן מאוד דומים, ורואים שזה יוצא כמו שראינו בטבלה.

1.2 $\{\pm 1\}^3$

נסמן G את חבורת הסימטריות של $\{\pm 1\}^3$. מטיעון קומבינטורי פשוט, $|G| \leq 48$. בתוך החבורה הזו חיות שתי תתי חבורות: S_3, על ידי תמורות על (x, y, z), וכן $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^3$ - שפועלת על ידי

$$(x, y, z) \mapsto (\pm x, \pm y, \pm z)$$

כעת,

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^3 &\lhd G \\ S_3 &\leq G \\ G = \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^3 &\rtimes S_3 \end{aligned}$$

בתוך G נמצאות גם

$$\begin{aligned} &I = \{\mathrm{id}, (x, y, z) \to (-x, -y, -z)\} \\ &S_4 = A \rtimes S_3 \end{aligned}$$

כאשר A היא חבורת כל ההעתקות שמשנות סימן למספר זוגי של קואורדינטות, ואיזומורפית לחבורה $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^2$. כעת,

$$G = S_4 \times I$$

לכן כל ההצגות של G הן טנזורים של ההצגות של S_4 עם ההצגות של $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.