<u>הצגות של חבורות סופיות</u>

ⓒ ארזים

8 בדצמבר 2016

1 חבורות דיהדרליות

את החבורה הידהדרלית D_n - מסדר $2n$ - ניתן להגדיר כחבורת הסימטריות של מצולע משוכלל בכל n צלעות. יש n שיקופים ועוד n סיבובים. כל סיבוב ρ מקיים $\rho^n = 1$, ויש כאלה שזה ממש הסדר שלהם. כל שיקוף ε מקיים $\varepsilon^2 = 1$. את D_n ניתן לתאר על ידי היחסים הבאים:

$$\rho^n = 1, \varepsilon^2 = 1, \rho\varepsilon = \varepsilon\rho^{-1}$$

ניתן לחשוב על D_n גם כחבורת האוטומורפיזמים של מעגל באורך n.

1.1 הצגות ממימד 1

ε חייב להיות מועתק לאחד מבין ± 1. מהיחס השלישי, ומכך שהצגה קומוטטיבית, נקבל כי גם ρ נועתק לאחד מבין ± 1. אם n אי זוגי, אז בהכרח $\rho \to 1$, שכן $\rho^n = 1$. כעת נוכל לבחור בחופשיות $\varepsilon \to \pm 1$. כך נקבל 2 הצגות שונות ממימד 1. אם n זוגי, נוכל להעתיק את ρ בחופשיות לאחד מבין ± 1. לכן כאן נקבל 4 הצגות ממימד 1.

1.2 הצגות ממימד 2

ראשית, ניקח $1 \le k < \frac{n}{2}$. נגדיר הצגה π_k:

$$\begin{aligned}
\rho &\to \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix} \\
\varepsilon &\to \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & -\cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_{\pi_k}\left(\rho^l\right) &= 2\cos\frac{2\pi lk}{n} \\
\chi_{\pi_k}\left(\varepsilon\rho^l\right) &= 0
\end{aligned}$$

נראה שההצגה אי פריקה:

$$\begin{aligned}(\chi_{\pi_k}, \chi_{\pi_k}) = \frac{1}{2n}\sum_{l=0}^{n-1} 4\cos^2\frac{2\pi lk}{n} &\stackrel{?}{=} 1\\ n \stackrel{?}{=} \sum_{l=0}^{n-1} 2\cos^2\frac{2\pi lk}{n} &= \sum_{l=0}^{n-1}\left(\cos\frac{4\pi lk}{n}+1\right)\\ 0 \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^{n-1}\cos\frac{4\pi lk}{n}\end{aligned}$$

וזה נכון משום שזה החלק הממשי של סכום שורשי היחידה מסדר מסויים, שכידוע הוא 0.

נראה שיטה אחרת להיווכח באי פריקות של ההצגה. נגדיר את π_k בצורה איזומורפית:

$$\begin{aligned}\rho &\to \begin{pmatrix}\zeta_n^k & 0\\ 0 & \zeta_n^{-k}\end{pmatrix}\\ \varepsilon &\to \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

כאן קל לראות שאין ווקטורים עצמיים משותפים, ולכן בהכרח π_k אי פריקה.
כעת ניווכח שמצאנו את כל ההצגות האי פריקות של D_n.
אם n אי זוגי, יש 2 הצגות ממימד 1, ואז

$$1^2+1^2+2^2\cdot\frac{n-1}{2}=2n$$

אם n זוגי, יש 4 הצגות ממימד 1, ואז

$$1^2\cdot 4+2^2\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)=2n$$

ולכן אלה אכן כל ההצגות האי פריקות של D_n.
נרצה לראות את π_k בצורה נוספת. נשים לב כי $\langle\rho\rangle = C_n \leq D_n$, ואז יש את ההצגה:

$$\rho\to\zeta_n^k$$

כעת, אם נשרה את ההצגה הזו לחבורה D_n, נקבל הצגה שאיזומורפית להצגה π_k, שכן

$$\mathbb{C}^2\cong\mathbb{C}\left(1,0\right)\oplus\mathbb{C}\left(0,1\right)$$

המחובר הראשון הוא תת הצגה של C_n, והמחובר השני הוא הזזה שלה.

ננסה לראות את האיזומורפיזם האחרון גם לפי כרקטרים. אנחנו יודעים את הכרקטר של ההצגה של C_n, ונחשב את הכרקטר של ההצגה המושרית. נקרא לכרקטר של ההצגה של C_n בתור τ, ואת ההצגה המושרית ψ.

$$\begin{aligned}\chi_\psi\left(\rho^l\right) &= \hat{\tau}\left(\rho^l\right)+\hat{\tau}\left(\varepsilon\rho^l\varepsilon\right)=\tau\left(\rho^l\right)+\tau\left(\rho^{-l}\right)=\zeta_n^{kl}+\zeta_n^{kl}= \\ &= 2\cos\frac{2\pi kl}{n}=\chi_{\pi_k}\left(\rho^l\right) \\ \chi_\psi\left(\varepsilon p^l\right) &= \hat{\tau}\left(\varepsilon\rho^l\right)+\hat{\tau}\left(\rho^l\varepsilon\right)=0+0=0=\chi_{\pi_k}\left(\varepsilon\rho^l\right)\end{aligned}$$