הצגות של חבורות סופיות

ⓒ ארזים

17 בנובמבר 2016

1 כרקטרים

הגדרה 1.1 תהי $\rho : G \to GL(V)$ הצגה, כאשר V מרחב וקטורי סוף מימדי. נגדיר את הכרקטר של ההצגה:

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g))$$

תכונות

1.

$$\chi_\rho(s) = \dim V$$

2. אם G סופית,

$$\chi_\rho\left(g^{-1}\right) = \overline{\chi_\rho(g)}$$

3.

$$\chi_\rho\left(a^{-1}ga\right) = \chi_\rho(g)$$

הגדרה 1.2 פונקציה $f : G \to \mathbb{F}$ תיקרא פונקציית מחלקה אם לכל $g, h \in G$ מתקיים

$$f\left(g^{-1}hg\right) = f(h)$$

הגדרה 1.3 אם ρ אי פריקה, נאמר שהכרקטר שלה χ אי פריק.

תכונות עבור הצגות ρ_1, ρ_2 :

.1

$$\chi_{\rho_1\oplus\rho_2}=\chi_{\rho_1}+\chi_{\rho_2}$$

.2

$$\chi_{\rho_1\otimes\rho_2}=\chi_{\rho_1}\cdot\chi_{\rho_2}$$

2 מרחבים דואליים

תזכורת בהינתן מרחב ווקטורי V ממימד סופי מעל $\mathbb{F}$, נגדיר

$$V^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(V,\mathbb{F}\right)$$

מתקיים $\dim V=\dim V^*$ ולכן $V\cong V^*$.

יש התאמה חד־חד־ערכית ועל (והופכת הכלה) בין תתי מרחבים של V לבין תתי מרחבים של V^* על ידי

$$\begin{aligned} U &\subseteq V\mapsto U^0=\{\varphi\in V^*\mid\varphi(U)=0\}\\ U &\subseteq V^*\mapsto U_0=\{v\in V\mid\forall\varphi\in U\ \ \varphi(v)=0\}\end{aligned}$$

כעת מתקיים $U^0\cong\left(V/U\right)^*$, ולכן $\dim U^0=\dim V-\dim U$.
עבור $T:V\to W$ לינארית, נגדיר $T^*:W^*\to V^*$ על ידי

$$\left(T^*\left(\varphi\right)\right)\left(v\right)=\varphi\left(T\left(v\right)\right)$$

אם $S,T:V\to V$ שתי העתקות לינאריות, אזי

$$\left(S\circ T\right)^*=T^*\circ S^*$$

עבור הצגה ρשל G במרחב V נוכל להגדיר הצגה דואלית ρ^* במרחב V^* באופן הבא:

$$\rho^*\left(g\right)=\rho\left(g^{-1}\right)^*$$

נוודא שזו הצגה:

$$\rho^*\left(gh\right)=\rho\left(h^{-1}g^{-1}\right)^*=\left(\rho\left(h^{-1}\right)\rho\left(g^{-1}\right)\right)^*=\rho\left(g^{-1}\right)^*\rho\left(h^{-1}\right)^*=\rho^*\left(g\right)\rho^*\left(h\right)$$

ההתאמה שתיארנו קודם בין תתי מרחבים של מרחב לתיי מרחבים של המרחב הדואלי מתאימה תתי הצגות של V לתתי הצגות של V^*: תהי $U \subseteq V$ תת הצגה. נראה כי $U^0 \subseteq V^*$ תת הצגה. יהי $g \in G$, נרצה להראות כי

$$\rho^* (g) U^0 \subseteq U^0$$

ניקח $\varphi \in U^0$, $u \in U$ ונראה כי

$$\left(\rho^* (g) \varphi\right) u = \left(\rho \left(g^{-1}\right)^* \varphi\right) u = \varphi \left(\rho \left(g^{-1}\right) u\right) = \varphi (u') = 0$$

ולכן U^0 אכן תת הצגה.

מסקנה 2.1 אם ההצגה ρ אי פריקה, אז גם ρ^* אי פריקה, ולהיפך.

עבור הכרקטרים, מתקיים

$$\chi_{\rho \otimes \rho^*} = \chi_\rho \cdot \chi_{\rho^*} = \chi_\rho \cdot \overline{\chi_\rho} = |\chi_\rho|^2$$

בשיעורי הבית ראינו שיש העתקה לינארית $\tau : V \otimes V^* \to \mathbb{F}$ כך שלכל $v \in V, \varphi \in V^*$ מתקיים

$$\tau (v \otimes \varphi) = \varphi (v)$$

τ היא הומומורפיזם של הצגות: מהמפכלה הטנזורית $\rho \otimes \rho^*$ אל ההצגה הטריוויאלית. נראה זאת: יהי $g \in G$ ונראה כי:

$$\begin{aligned} \tau (g (v \otimes \varphi)) &= \tau \left(\rho (g) v \otimes \rho^* (g) \varphi\right) = \tau \left(\rho (g) v \otimes \rho \left(g^{-1}\right)^* \varphi\right) = \left(\rho \left(g^{-1}\right)^* \varphi\right) \left(\rho (g) v\right) = \\ &= \varphi \left(\rho \left(g^{-1}\right) \rho (g) v\right) = \varphi (v) = g\varphi (v) = g\tau (v \otimes \varphi) \end{aligned}$$

2.1 הלמה של שור

עבור V, W שתי הצגות של G, יש לנו את $\mathrm{Hom}_G (V, W)$, וזה מרחב ווקטורי. אם $V = W$, אז $\mathrm{End}_G (V) = \mathrm{Hom}_G (V, V)$ הוא אלגברה מעל השדה.

משפט 2.2 (הלמה של שור)

1. אם $V \ncong W$ אי פריקות, אזי $\mathrm{Hom} (V, W) = \{0\}$.
2. נניח כי $V \cong W$ אי פריקות ממימד סופי, מעל $\mathbb{C}$ (כל שדה סגור אלגברית), אזי $\mathrm{Hom} (V, W) \cong \mathbb{C}$.

מסקנה 2.3 נניח כי G סופית. במרחב הפונקציות מהחבורה G לשדה $\mathbb{C}$, הכרקטרים האי פריקים הם אורתונורמליים לפי המכפלה הפנימית

$$(f \mid g) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{g(x)}$$

מסקנה 2.4 הכרקטר קובע את ההצגה ביחידות עד כדי איזומורפיזם.

דוגמא נראה שדברים לא עובדים טוב מעל הממשיים. נגדיר הצגה של $G = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \left\{1, a, a^2\right\}$ על ידי

$$a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

מהו $\mathrm{End}_G\left(\mathbb{R}^2\right)$? כל המטריצות שמתחלפות עם המטריצה שמתאימה לאיבר a.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -b & a-b \\ -d & c-d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & d \\ -a-c & -b-d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסך הכל מקבלים

$$c = -b, d = a - b$$

לכן נקבל כי

$$\mathrm{End}_G\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{ a \cdot I_2 + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ומתקיים

$$\dim_{\mathbb{R}}\left(\mathrm{End}_G\left(\mathbb{R}^2\right)\right) = 2$$

אבל ההצגה אי פריקה שכן הפולינום האופייני של המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ הוא $x^2 + x + 1$, והוא אי פריק מעל $\mathbb{R}$.
קל לראות כי $\mathrm{End}_{\mathrm{G}}\left(\mathbb{R}^2\right)$ היא אלגברה חילופית, וכן כל איבר שאינו 0 הוא הפיך.
לכן זוהי למעשה הרחבת שדות מעל $\mathbb{R}$ ממימד 2, ונסיק כי $\mathrm{End}_G\left(\mathbb{R}^2\right) \cong \mathbb{C}$.