הצגות של חבורות סופיות

ⓒ ארזים

10 בנובמבר 2016

1 מרחבי מנה

הגדרה 1.1 יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ויהי $W \subseteq V$ תת־מרחב. נוכל להגדיר את המנה

$$V/W = \{v + W \mid v \in V\}$$

וזהו מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$: לכל $c \in \mathbb{F}, v \in V$

$$c(v+W) = cv + W$$

ישנה טרנספורמציה לינארית טבעית

$$\begin{array}{rcl} \pi : V & \to & V/W \\ \pi(v) & = & v + W \end{array}$$

שנקראת ההטלה, או העתקת המנה.

קל לראות כי לכל $T : V \to U$ טרנספורמציה לינארית המתפקטרת דרך V/W (כלומר ניתן לכתוב $T = \tilde{T} \circ \pi, \tilde{T} : V/W \to U$) מתאפסת על W. גם ההפך נכון - כל העתקה $T : V \to U$ שמתאפסת על W מתפקטרת דרך V/W באופן יחיד. נוכל להגדיר

$$\alpha(v+W) = T(v)$$

נראה שזה מוגדר היטב:

$$v + W = v' + W \iff v - v' \in W \iff T(v - v') = 0 \iff Tv - Tv' = 0$$

וכמובן שכעת $T = \alpha \circ \pi$. היחידות ברורה, שכן חייבים להגדיר את α כמו שהגדרנו. תכונה זו נקראת **התכונה האוניברסאלית** של מרחב המנה V/W. התכונה הזו גם מאפיינת את V/W (עד כדי איזומורפיזם).

נניח כי S מקיים את התכונה האוניברסאלית, עם פונקציה אליה מתוך V שנסמנה ρ. נשים לב כי $\pi : V \to V/W$ מתאפסת על W, ולכן מאוניברסליות S קיימת $\beta : S \to V/W$ עבורה

$$\beta\rho = \pi$$

ומהחלפת תפקידים נקבל כי קיימת $\gamma : V/W \to S$ עבורה

$$\gamma\pi = \rho$$

נקבל בסך הכל

$$\beta\gamma\pi = \pi$$

לכן β, γ הופכיות זו לזו (ההפיכות מהצד השני נובעת באותה צורה). לכן $S \cong V/W$.
קל לראות כי

$$V \cong W \oplus V/W$$

נראה איזומורפיזם ספציפי: נבחר בסיס $\{w_i\}$ של W, ובסיס $\{v_j + W\}$ של V/W. נגדיר

$$\begin{aligned} q : W \oplus V/W &\to V \\ q(w_i) &= w_i \\ q(v_i + W) &= v_i \end{aligned}$$

אם $W \leq V$ הצגות של G, אזי על V/W יש הצגה של G לפי

$$g(v + W) = gv + W$$

נוכיח שזה מוגדר היטב:

$$\begin{aligned} v + W &= v' + W \iff v - v' \in W \iff g(v - v') \in W \iff gv - gv' \in W \iff \\ &\iff gv + W = gv' + W \end{aligned}$$

כעת $\pi : V \to V/W$ היא הומומורפיזם של הצגות:

$$\pi(gv) = gv + W = g(v + W) = g\pi(v)$$

כמו כן, $V \cong W \oplus V/W$ כהצגות של G. כדי להוכיח את זה, ניתן לקחת את האיזומורפיזם q שתיארנו קודם, ולהראות שהוא הומומורפיזם של הצגות.

2 מכפלות טנזוריות

הגדרה 2.1 בהינתן שני מרחבים ווקטוריים V,W נגדיר את המכפלה הטנזורית שלהם $V\otimes W$ להיות מרחב עם העתקה בי־לינארית $\pi:V\times W\to V\otimes W$ שאוניברסאלית ביחס להיותה בי־לינארית. כלומר, לכל מרחב U עם העתקה בי־לינארית ρ מהמרחב $V\times W$, קיימת העתקה לינארית $\beta:V\otimes W\to U$ המקיימת $\beta\circ\pi=\rho$.

בנייה יהי Ω המרחב הווקטורי הנפרש על ידי $\{(v,w)\mid w\in W, v\in V\}$. נגדיר

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(v_1+v_2,w)-(v_1,w)-(v_2,w)\mid v_1,v_2\in V, w\in W\} \\ A_2 &= \{(v,w_1+w_2)-(v,w_1)-(v,w_2)\mid v\in V, w_1,w_2\in W\} \\ A_3 &= \{(cv,w)-c\,(v,w)\mid v\in V, w\in W, c\in\mathbb{F}\} \\ A_4 &= \{(v,cw)-c\,(v,w)\mid v\in V, w\in W, c\in\mathbb{F}\} \end{aligned}$$

ניקח את R להיות תת המרחב של Ω הנפרש על ידי

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$$

ונגדיר $V\otimes W=\Omega/R$.
יש העתקות

$$V\times W\xrightarrow{i}\Omega\xrightarrow{\tau}\Omega/R$$

i היא השיכון, τ היא ההטלה, ונגדיר $\pi=\tau\circ i$. האוניברסליות נובעת מזה שההעתקה β חייבת להיות קיימת מאוניברסליות המנה Ω/R.

אם ניקח v_i בסיס של V, w_i בסיס של W, נשים לב כי

$$v_1\otimes w_1+v_1\otimes w_2=v_1\otimes(w_1+w_2)$$

וכן זה עובד בקואורדינטה השנייה. לכן $V\otimes W$ נפרש על ידי $v_i\otimes w_j$, ולכן $\dim V\otimes W=\dim V\cdot\dim W$.

נשים לב שכל טנזור $v\otimes w$ הוא איבר במכפלה הטנזורית, אבל לא כל איבר הוא טנזור ־ הרבה מהם הם צירופים של טנזורים.

בהנתן העתקות לינאריות $T:V\to W, S:Z\to Y$ נוכל להגדיר טרנספורמציה לינארית

$$\begin{aligned} T\otimes S:V\otimes Z &\to W\otimes Y \\ T\otimes S\,(v\otimes z) &= (T\,(v)\otimes S\,(z)) \end{aligned}$$

כך מקבלים הצגה של G במכפלה טנזורית של הצגות.