הצגות של חבורות סופיות

© ארזים

12 בינואר 2017

ראינו בהרצאה שאם $A \lhd G$ אבלית אזי $[G:A]$ מתחלק במימד של כל הצגה אי פריקה של G.

חבורה G נקראת סופר פתירה אם ישנה סדרה נורמלית

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{n-1} < G = G$$

כך שמתקיים $G_i \lhd G$, וכן G_i/G_{i-1} ציקלית. ראינו כי כל הצגה אי פריקה של חבורה סופר פתירה הינה מונומיאלית - מושרית מהצגה ממימד 1.

נתבונן בדוגמה (נגדית). נסמן

$$H = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{1, i, j, k\}$$

הקווטרניונים הממשיים. נתבונן באיברים ההפיכים $H^{\times}$. נוכל להגדיר הצמדה:

$$(a + bi + cj + dk)^* = a - bi - cj - dk$$

ההצמדה הזו היא אנטי הומומורפיזם, כלומר

$$(q_1q_2)^* = q_2^*q_1^*$$

נגדיר

$$|q| = q \cdot q^*$$

אזי,

$$|q| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

כאן נקבל

$$|q_1q_2| = |q_1| |q_2|$$

נשים לב שכל האיברים מהצורה

$$\frac{1}{2}\left(\pm 1 \pm i \pm j \pm k\right)$$

לכל בחירת סימנים, הם הפיכים. בנוסף גם $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ הפיכים - וקיבלנו כבר 24 איברים הפיכים. 24 האיברים הללו הם חבורה של הפיכים - קל לחשב ולהיווכח. את תת החבורה הזו נסמן G. נסמן $E = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ - אלה בדיוק האיברים שמקיימים $q^* = -q$ (וגם ± 1). נקבל כי $E \lhd G$, על ידי חישוב פשוט. נוכל לכתוב את G בתור

$$E \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$$

הפעולה על E היא פרמוטציה בין i, j, k. כעת, נגדיר את ההומומורפיזם:

$$\begin{gathered}H \to M_2\left(\mathbb{C}\right)\\ a+bi+cj+dk \mapsto \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}\end{gathered}$$

מכאן נקבל הצגה מרוכבת דו מימדית של G. נשים לב שמתקיים $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left(\rho\left(G\right)\right) = M_2\left(\mathbb{C}\right)$, ולכן ρ אי פריקה. נניח בשלילה כי ρ מושרית על ידי הצגה חד מימדית של תת חבורה $K < G$. אזי K בהכרח מאינדקס 2. נראה שלא קיימת כזו תת חבורה. תהי Q חבורת 2 סילוב של K - מסדר 4. עד כדי הצמדה, $Q \subseteq E$. בלי הגבלת הכלליות, $Q = \{\pm 1, \pm i\}$. לכן $\pm i \in K$, ולכן, על ידי הצמדות (K נורמלית כי היא מאינדקס 2) נקבל כי $E \subseteq K$ בסתירה - $12 \nmid 8$. לכן קיבנו הצגה אי פריקה שאינה מושרית על ידי הצגה ממימד 1 של תת חבורה. אם כן, ברור כי G אינה פתירה ביותר. דרכים נוספות לראות את G:

$$\begin{aligned}&G = \left(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\left\{1, i, j, k\right\}\right)^*\\ &G \cong SL_2\left(\mathbb{F}_3\right)\\ &G \cong \mathrm{Aut}\left(\frac{y^2 - y = x^3}{\mathbb{F}_2}\right)\end{aligned}$$