הצגות של חבורות סופיות

ⓒ ארזים

3 בנובמבר 2016

הגדרה 0.1 תהי G חבורה, ויהי V מרחב ווקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. הצגה של G היא פעולה (לא משנה אם שמאלית או ימנית, לרוב נעבוד עם שמאלית) של G על V על ידי העתקות לינאריות. הגדרה זו שקולה לקיום הומומורפיזם

$$\rho : G \to GL(V)$$

הגדרה 0.2 תהיינה V_1, V_2 הצגות של חבורה G. הומומורפיזם של מרחבים ווקטוריים $T : V_1 \to V_2$ (העתקה לינארית) ייקרא הומומורפיזם של הצגות אם

$$\forall v \in V_1, g \in G \;\; Tgv = gTv$$

הומומורפיזם כזה T ייקרא איזומורפיזם אם T חד־חד־ערכי ועל, ובמקרה $V_1 = V_2 = V$, זה שקול לכך שמתקיים

$$TgT^{-1} = g$$

הגדרה 0.3 יהי V מרחב הצגה של חבורה G. תת מרחב $W \subseteq V$ ייקרא אינווריאנטי אם לכל $g \in G$ ולכל $w \in W$ מתקיים $gw \in W$. W כזה נקרא גם תת הצגה של G.

משפט 0.4 (Maschke) תהי G חבורה סופית, ותהי V הצגה ממימד סופי של G מעל $\mathbb{C}$. תהי $W \subseteq V$ תת־הצגה. אזי ישנה תת הצגה $U \subseteq V$ כך שמתקיים $V = W \oplus U$.

דוגמאות

1. יהי p ראשוני, וניקח $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. יהי $x \in G$ יוצר. נגדיר את ההצגה הבאה: x יפעל על $\mathbb{C}^p$ על ידי הזזה ציקלית, כלומר

$$x \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_p \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{pmatrix}$$

ברור כי $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ \vdots \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C} \right\}$ היא תת הצגה, שנסמנה W. אם נגדיר

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \mid \sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \right\}$$

אזי U היא גם כן תת הצגה. ואמנם מתקיים

$$V = \mathbb{C}^p = U \oplus W$$

2. תהי $D_{10} = \left\langle \rho, \varepsilon \mid \rho^5 = 1, \varepsilon^2 = 1, \rho\varepsilon = \varepsilon\rho^{-1} \right\rangle$ החבורה הדיאדרלית מסדר 10. נוכל לייצג את החבורה על ידי

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{5} & -\sin\frac{2\pi}{5} \\ \sin\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

נרצה למצוא את תתי ההצגות של הצגה זו. מעל $\mathbb{R}$, אין תתי הצגות לא טריוויאליות, שכן כל ישר יסובב לישר אחר. לעומת זאת, מעל $\mathbb{C}$, בתרגיל בית, נבדוק האם יש ווקטור עצמי משותף של ρ, ε, שייצג תת מרחב אינווריאנטי.

3. יהי $V = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A = A^t\}$, ותהי $G = GL_n(\mathbb{C})$. נגדיר את ההצגה:

$$g(x) = gxg^t$$

נוודא שזו הצגה:

$$\begin{aligned} g(ax+by) &= g(ax+by)g^t = gaxg^t + gbyg^t = agxg^t + bgyg^t = \\ &= ag(x) + bg(y) \end{aligned}$$

$$(gh)(x) = ghx(gh)^t = ghxh^tg^t = gh(x)g^t = g(h(x))$$

ולכן זו אכן הצגה. מסלולי הפעולה הזו של G על V הם:

$$O_k = \{x \in V \mid \mathrm{rk}(X) = k\}, 0 \le k \le n$$

בתרגיל הבית ניעזר בעובדה זו כדי להבין מהן תתי ההצגות (או ליתר דיוק, שאין כאלה לא טריוויאליות).

תרגיל הראו כי להצגה של $GL_n(\mathbb{R})$ במרחב $\mathbb{C}^n$ אין תתי הצגות לא טריוויאליות.

פתרון תהי $U \neq \{0\}$ תת הצגה. יהי $0 \neq u \in U$. נסיק כי

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i u \in U$$

כאשר $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $g_i \in G$, $m \in \mathbb{N}$. כתיבה אחרת ושקולה:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i\right) u \in U$$

קל לראות כי הסכום שבסוגריים יכול לייצג כל מטריצה מרוכבת (ניתן להרכיב כל מטריצה מהבסיס הסטנדרטי של מרחב המטריצות בקלות). כלומר $M_n(\mathbb{C}) \subseteq \operatorname{span}_{\mathbb{C}}(GL_n(\mathbb{R}))$. לכן U אינווריאנטי תחת $M_n(\mathbb{C})$ - ולכן בהכרח $U = \mathbb{C}^n$.