הצגות של חבורות סופיות

ⓒ ארזים

29 בדצמבר 2016

1 דוגמאות להצגות מושרות

1.1 תת חבורות נורמליות

בשיעור שעבר ראינו טענה על תת חבורות נורמליות, וממנה יש מסקנה:

מסקנה 1.1 אם $A \leq G$ תת חבורה נורמלית ואבלית, אזי המעלה של כל הצגה אי פריקה של G מחלקת את $[G:A]$.

הוכחה: באינדוקציה על הסדר של G.
במקרה הראשון של הטענה מהשיעור שעבר, ρ מושרית על ידי σ של H. הנחת האינדוקציה אומרת כי

$$\deg(\sigma) \mid [H:A]$$

אם נכפיל פי $[G:H]$ נקבל

$$\deg(\rho) \mid [G:A]$$

במקרה השני, נגדיר $G' = \rho(G)$, $A' = \rho(A)$. נטען כי

$$[G':A'] \mid [G:A]$$

ואמנם, יהי $K = \ker\rho$, $K_A = \ker\rho\mid_A = K \cap A$. אזי

$$A' = A/K_A, G' = G/K$$

ולכן

$$[G':A'] = \frac{|G'|}{|A'|} = \frac{|G|\,|K_A|}{|K|\,|A|} = \frac{[G:A]}{[K:K_A]} \mid [G:A]$$

לפי הטענה מהשיעור שעבר, האיברים של A' הן הומותטיות, ולכן A' מוכלת במרכז של G'. לפי טענה שראינו בעבר,

$$\dim(\rho) \mid [G':\mathrm{Cent}(G')] \mid [G':A'] \mid [G:A]$$

■

1.2 מכפלה חצי ישרה בחבורה אבלית

יהיו A,H תת חבורות של G, כאשר A נורמלית ואבלית, וכן $G=A\rtimes H$.
A אבלית, ולכן כל הכרקטרים האי פריקים שלה הם ממעלה 1, והם מהווים חבורה:

$$X=\mathrm{Hom}\left(G,\mathbb{C}^{*}\right)$$

G פועלת על X: אם $\chi\in X,s\in G$ אזי

$$\left(s\chi\right)a=\chi\left(s^{-1}as\right)$$

לכל $a\in A$. G פועלת על X, בפרט H פועלת עליה. יהיו χ_i, לכל $i\in X\big/H$, נציגים של המסלולים. לכל $i\in X\big/H$ יהי H_i המייצב של χ_i בתוך H. נגדיר

$$G_i=A\cdot H_i\subseteq G$$

אנו מרחיבים את χ_i מן A על G_i על ידי

$$\chi_i\left(ah\right)=\chi_i\left(a\right)$$

נטען כי זהו כרקטר של G_i. משתמשים בהנחה כי $h\chi_i=\chi_i$ עבור $h\in H_i$.

$$\begin{aligned}\chi_i\left(aha'h'\right)&=\chi_i\left(aha'h^{-1}hh'\right)=\chi_i\left(aha'h^{-1}\right)=\chi_i\left(a\right)\cdot\chi_i\left(ha'h^{-1}\right)=\\&=\chi_i\left(a\right)\cdot\left(h^{-1}\chi_i\right)\left(a'\right)=\chi_i\left(a\right)\cdot\chi_i\left(a'\right)=\chi_i\left(ah\right)\cdot\chi_i\left(a'h'\right)\end{aligned}$$

אז χ_i הוא כרקטר ממעלה 1 של G_i. תהי ρ הצגה אי פריקה של H_i. נגדיר הצגה אי פריקה $\tilde{\rho}$ של G_i:

$$G_i\twoheadrightarrow H_i\xrightarrow{\rho}GL\left(\cdot\right)$$

כעת,

$$\chi_i\otimes\tilde{\rho}$$

היא הצגה של G_i. מכאן נקבל הצגה $\theta_{i,\rho}$ - ההצגה המושרית של G.

טענה 1.2 1. $\theta_{i,\rho}$ אי פריקה לכל i ולכל ρ.

2. אם $\theta_{i,\rho}\cong\theta_{i',\rho'}$, אזי $i=i'$, $\rho=\rho'$.

3. אלה כל ההצגות האי פריקות של G.

הוכחה:

1. יהי $s \notin G_i = A \cdot H_i$. נגדיר

$$K_s = G_i \cap sG_is^{-1}$$

יש לנו ההצגה $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$ של G_i. לוקחים שני שיכונים:

$$K_s \hookrightarrow G_i : x \mapsto x, x \mapsto sxs^{-1}$$

נרצה להראות ששתי ההצגות של K_s הן זרות. מספיק לבדוק שהצמצום על $A \subseteq K_s$ הן זרות.
בהצגה הראשונה, A פועלת על ידי χ_i, ובשנייה על ידי $s\chi_i$. $s \notin G_i$, ולכן $s\chi_i \neq \chi_i$, כי $H_i = \mathrm{Stab}\left(\chi_i\right)$. לכן מקריטריון מאקי נקבל כי ההצגה המושרית אכן אי פריקה.

2. נניח כי $\theta_{i,\rho} = \theta_{i',\rho'}$. הצמצום של $\theta_{i,\rho}$ על A מכיל רק כרקטרים במסלול של χ_i, ומכאן נקבל כי המסלול של χ_i, $\chi_{i'}$, ולכן, משום שלקחנו נציגים, $i = i'$.
יהי W מרחב ההצגה של $\theta_{i,\rho}$. יהי $W_i \subseteq W$ תת המרחב המתאים לכרקטר χ_i:

$$W_i = \left\{x \in W \mid \forall a \in A \;\; \theta_{i,\rho}\left(a\right)x = \chi_i\left(a\right)x\right\}$$

כמובן שזהו מרחב ששמור תחת H_i, שכן $H_i = \mathrm{Stab}_H\left(\chi_i\right)$.
יהי U מרחב ההצגה של $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$ וגם של $\tilde{\rho}$ (כי χ_i חד־מימדי). יש שיכון של U בתוך W, וכן

$$W = \bigoplus_{r \in G \big/ G_i = H \big/ H_i} \rho\left(r\right)W$$

החבורה A פועלת במרחב U על ידי χ_i. אם $r \neq 1 \cdot G_i$ A פועלת על $\rho\left(r\right)U$ על ידי $\rho\left(r\right)\chi_i \neq \chi_i$, שכן $\mathrm{Stab}_G\left(\chi_i\right) = G_i$.
לכן $W_i = U \subseteq W$. לכן H_i פועלת בתוך W_i (כלומר בתוך U) על ידי ρ. לכן קיבלנו את ρ מתוך $\theta_{i,\rho}$, ולכן יינבע כי $\rho = \rho'$.

3. תהי $\sigma : G \to GL\left(W\right)$ הצגה אי פריקה של G. נכתוב

$$\mathrm{Res}_A\sigma = \bigoplus_{\chi \in X} W_\chi$$

בהכרח קיים χ עבורו $W_\chi \neq 0$. אם $s \in G$ אזי $\sigma\left(s\right)$ מעביר את W_χ אל $W_{s\chi}$. יהי i מסלול של G בתוך X (שקול למסלול של H, שכן A פועלת בטריוויאליות). נבחר χ_i נציג.
נגדיר $H_i = \mathrm{Stab}_H\left(\chi_i\right)$. כמובן, H_i מעביר את W_{χ_i} לעצמו. יהי W_i תת מרחב H_i אינווריאנטי אי פריק בתוך W_{χ_i}. נתבונן בחבורה

$$G_i = A \cdot H_i$$

נגדיר את ρ להיות ההצגה של H_i בתוך W_i. נקבל כי G_i פועלת בתוך W_i על ידי $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$. נותר רק להראות כי הצגה זו משרה את σ.
הצמצום של σ על G_i מכילה את $\chi_i \otimes \tilde{\rho}$. אם כן, σ מוכלת בתוך $\theta_{i,\rho}$.

■

1.3 מחלקות של חבורות סופיות

הגדרה 1.3 G נקראת פתירה אם קיימת סדרה

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

כאשר כל מנה G_i/G_{i-1} אבלית.

הגדרה 1.4 חבורה נקראת פתירה ביותר (supersolvable) אם מתקיים אותו תנאי כמו קודם, רק שלכל i, $G_i \lhd G$, וכן כל מנה G_i/G_{i-1} היא ציקלית.

הגדרה 1.5 חבורה נקראת נילפוטנטית אם מתקיים אותו תנאי כמו בהגדרת חבורה פתירה ביותר, רק שלכל i, $G_i/G_{i-1} \leq Z\left(G/G_{i-1}\right)$.

יש משפט שאומר כי חבורה נילפוטנטית היא פתירה ביותר, וכן משפט שאומר שכל הצגה אי פריקה של חבורה פתירה ביותר מושרית מהצגה ממימד 1. את אלה נראה בשיעור הבא.