

הצגות של חבורות סופיות

© ארזים

15 בדצמבר 2016

טענה 0.1 נתבונן בחוג $\text{Cent}\mathbb{C}[G]$. יהי $u = \sum_{s \in \text{Cent}\mathbb{C}[G]} u(s)s$, ונניח שכל האיברים $u(s)$ הם מספרים שלמים אלגבריים. אזי u שלם מעל \mathbb{Z} .

הוכחה: יהיו C_i מחלקות הצמידות של G ($i \in \{1, \dots, h\}$). נגדיר:

$$e_i = \sum_{s \in C_i} s \subseteq \mathbb{Z}[G] \subseteq \mathbb{C}[G]$$

נבחר נציגים $s_i \in C_i$, ואז מתקיים למעשה

$$u = \sum u(s_i) e_i$$

נתון כי $u(s_i)$ שלם מעל \mathbb{Z} , ולכן מספיק להראות שכל e_i שלם מעל \mathbb{Z} . אבל מתקיים

$$\text{Cent}\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_h$$

■ לכן כל איבר של תת חוג נוצר סופית שמכיל את $\mathbb{Z}[x]$. לכן סיימנו.

מסקנה 0.2 תהי ρ הצגה אי פריקה של G מממד n עם כרקטר χ . אם u כמו בטענה, כלומר כל $u(s)$ שלם אלגברי, אזי המספר

$$\frac{1}{n} \sum_{s \in G} u(s) \chi(s)$$

הוא מספר שלם אלגברי.

הוכחה: זהו למעשה $\omega(u)$, עבור אותו הומומורפיזם

$$\omega : \text{Cent}\mathbb{C}[G] \rightarrow \mathbb{C}$$

■ שמתאים להצגה ρ ראינו זאת בשיעור שעבר.

מסקנה 0.3 המעלות של ההצגות האי פריקות של G מחלקות את הסדר של G .

הוכחה: תהי הצגה אי פריקה ממימד n עם כרקטר χ . נפעיל המסקנה הקודמת עבור

$$u = \sum_{s \in G} \chi(s^{-1}) s$$

כל המקדמים כמונן שלמים אלגבריים. לכן המספר

$$\frac{1}{n} \sum_{s \in G} \chi(s^{-1}) \chi(s)$$

הוא שלם אלגברי. נחשב:

$$\frac{1}{n} \sum_{s \in G} \chi(s^{-1}) \chi(s) = \frac{|G|}{n} \langle \chi, \chi \rangle = \frac{|G|}{n} (x, x) = \frac{|G|}{n}$$

כלומר קיבלנו שהיחס הזה הוא שלם אלגברי, אבל הוא גם רציונאלי. ראינו כבר כי אם מספר רציונאלי הוא שלם אלגברי, אזי הוא בהכרח שלם - ולכן היחס הזה שלם. ■

אפשר לתת אפילו עובדה חזקה יותר:

טענה 0.4 אם $A \triangleleft G$ תת חבורה נורמלית ואבלית, אזי $[G : A] \mid n$.

אנחנו נוכיח מעט פחות:

טענה 0.5 יהי C המרכז של החבורה G . אזי המעלות של כל ההצגות האי פריקות מחלקות את $[G : C]$.

הוכחה: ניקח הצגה אי פריקה $\rho : G \rightarrow GL(W)$ ממימד n . נכתוב $g = |G|$, $c = |C|$. אם $s \in C$ אזי לכל $t \in G$ מתקיים $st = ts$, כלומר

$$\rho(s) \rho(t) = \rho(t) \rho(s)$$

מלמת שור נקבל כי

$$\rho(s) = \lambda(s) \text{Id}$$

נקבל ככה הומומורפיזם

$$\lambda : C \rightarrow \mathbb{C}^*$$

ניקח $1 \leq m \in \mathbb{Z}$ ונתבונן בהצגה:

$$\rho^m : G^m \rightarrow GL\left(\bigotimes_{i=1}^m W\right)$$

מטענות שראינו בעבר, זו הצגה אי פריקה של G^m . נתבונן בתת החבורה $C^m \subseteq G^m$, וניקח בה איבר

$$(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

שעליו נפעיל את האנלוג של ההעתקה λ ונקבל

$$\lambda(s_1) \cdots \lambda(s_n)$$

נתבונן בתת החבורה המרכזית הבאה:

$$H = \{(s_1, \dots, s_n) \in C \mid s_1 \cdots s_n = 1\}$$

אז נקבל הצגה:

$$G^m / H \rightarrow W^{\otimes m}$$

(הסימון הוא של מכפלה טנזורית m פעמים). נקבל מהמסקנה הקודמת:

$$\begin{aligned} n^m &\mid \frac{g^m}{c^{m-1}} \\ \frac{g^m}{c^{m-1}n^m} &\in \mathbb{Z} \\ \left(\frac{g}{nc}\right)^m &\in \frac{1}{c}\mathbb{Z} \end{aligned}$$

■ וזאת לכל m , כלומר בסך הכל $\frac{g}{nc} \in \mathbb{Z}$, כמו שרצינו לראות.

1 הצגות מושרות וקריטריון מאקי

1.1 השראה

בהינתן G סופית, והצגה (V, ρ) של G מעל \mathbb{C} , יש לנו פעולה של $\mathbb{C}[G]$ על V :

$$f \cdot x = \sum_{s \in G} f(s) \rho_s x$$

ולכן V מודול מעל אלגברת החבורה. בכיוון ההפוך, אם יש מודול V מעל $\mathbb{C}[G]$, אזי מקבלים הצגה של G . לכל $s \in G \subseteq \mathbb{C}[G]$, נוכל להגדיר $s \cdot x$ לפי הפעולה של $\mathbb{C}[G]$. מעתה, נחליף באופן חופשי בין המושגים של הצגה ושל מודול מעל $\mathbb{C}[G]$.

הערה 1.1 אם $H \subseteq G$ וכן W מודול מעל $\mathbb{C}[H]$, נגדיר $V = \text{Ind}_H^G W$. אם E מודול מעל $\mathbb{C}[G]$ אזי מתקיים איזומורפיזם קונוני:

$$\text{Hom}^H(W, E) \cong \text{Hom}^G(V, E)$$

הוכחה: תהי $f \in \text{Hom}^H(W, E)$, נקרא להצגה של המודול W , θ , ולהצגה של המודול E ρ' . אזי מתקיים

$$f(\theta_t w) = \rho'_t f(w)$$

אזי לפי למה שראינו בעבר, אפשר להרחיב את f באופן יחיד להעתקה לינארית

$$F : V \rightarrow E$$

כך שמתקיים $F \circ \rho_s = \rho'_s \circ f$ לכל $s \in G$. נקבל העתקה

$$\begin{aligned} \text{Hom}^H(W, E) &\rightarrow \text{Hom}^G(V, E) \\ f &\mapsto F \end{aligned}$$

בכיוון ההפוך,

$$F|_W \leftarrow f$$

■

הערה 1.2 נציין שההערה הזו מכילה משמעות די עמוקה. נסמן Rep_H את קטגוריית ההצגות של H , ובדומה Rep_G . אזי יש לנ פונקטורים:

$$\begin{aligned} \text{Ind} : \text{Rep}_H &\rightarrow \text{Rep}_G \\ \text{Res} : \text{Rep}_G &\rightarrow \text{Rep}_H \end{aligned}$$

השראה וצמצום, בהתאמה. אלה פונקטורים צמודים, במובן שלכל $W \in \text{Rep}_H, E \in \text{Rep}_G$ יש איזומורפיזם

$$\text{Hom}^G(\text{Ind}W, E) \cong \text{Hom}^H(W, \text{Res}E)$$

הערה 1.3 השראה היא טרנזיטיבית: אם G תת חבורה של חבורה K אזי

$$\text{Ind}_G^K(\text{Ind}_H^G) \cong \text{Ind}_H^K$$

הוכחה: ניקח קבוצת נציגים R של G/H , וקבוצת נציגים P של K/G . נוכל להגדיר את הקבוצה

$$P \cdot R \subseteq K$$

וזו נותנת קבוצת נציגים של K/H . יש לנו שיכון

$$W \hookrightarrow \text{Ind}_H^G W \hookrightarrow \text{Ind}_G^K \left(\text{Ind}_H^G W \right)$$

ניקח בגורם הימני ביותר את ההצגה להיות ρ , והאחרות יהיו כמובן צמצומים שלה, ונסמן גם אותם ρ (כי זה לא מבבל בכלל).

$$\sum_{r \in R} \rho_r W = \text{Ind}_H^G W$$

הסכום הוא ישר. כמו כן,

$$\sum_{p \in P} \rho_p \text{Ind}_H^G W = \sum_{p \in P} \rho_p \sum_{r \in R} \rho_r W = \text{Ind}_G^K \left(\text{Ind}_H^G W \right)$$

ושוב, כל הסכומים ישרים. בסך הכל נקבל

$$\sum_{s \in PR} \rho_s W = \text{Ind}_G^K \left(\text{Ind}_H^G W \right)$$

וזהו סכום ישר. כמו כן

$$\sum_{s \in PR} \rho_s W = \text{Ind}_H^K W$$

■ שכן זו קבוצת נציגים. לכן נקבל את האיזומורפיזם שרצינו.

טענה 1.4 תהי W הצגה של $H \leq G$. יהי V המרחב הבא:

$$V = \{ f : G \rightarrow W \mid f(h^{-1}x) = \theta_h f(x) \}$$

ונוכל להגדיר פעולה של G על מרחב זה:

$$(gf)(x) = f(xg)$$

זה נותן הצגה, וזו ההצגה המושרית.

ראינו את הבנייה הזו של ההצגה המושרית בתרגול.

טענה 1.5 יהי V מודול מעל $\mathbb{C}[G]$ כך שהוא סכום ישר

$$V = \bigoplus_{i \in I} W_i$$

של תת מרחבים ווקטוריים, שאותם G מתמירה טרנזיטיבית. יהי $i_0 \in I$, ונסמן $W = W_{i_0}$. נגדיר

$$H = \text{Stab}_G(W) = \{g \in G \mid gW = W\}$$

אזי W אינווריאנטי תחת H (ברור), והמודול V הוא מושרה על ידי W .

נשים לב שזו ממש ההגדרה שראינו להצגה המושרית.

הערה 1.6 למעשה V אי פריקה אם ורק אם הפעולה של G על W_i היא טרנזיטיבית - לכן מספיק למצוא W_i כאלה שאותם G מתמירה. אם הפעולה לא הייתה טרנזיטיבית, סכום ישר של איברי כל מסלול היה נותן תת הצגה.

1.2 הכרקטר של הצגה מושרית, נוסחת ההדדיות של פרובניוס

הגדרה 1.7 תהי $H \subseteq G$. אם f פונקציית מחלקות על H , נגדיר f' על G לפי

$$f'(s) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}st \in H}} f(t^{-1}st)$$

זו נקראת הפונקציה המושרית על ידי f , וכותבים

$$f' = \text{Ind}_H^G f$$

אם החבורות ברורות, כותבים גם

$$f' = \text{Ind} f$$

טענה 1.8 תהי f פונקציית מחלקות על $H \leq G$.

1. $\text{Ind} f$ היא פונקציית מחלקות על G .

2. אם f היא כרקטר של הצגה W של H , אזי $\text{Ind} f$ היא הכרקטר של $\text{Ind} W$.

הוכחה:

1. נחשב:

$$f'(u^{-1}su) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{t \in G \\ t^{-1}u^{-1}sut \in H}} f(t^{-1}u^{-1}sut) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{v \in G \\ v^{-1}sv \in H}} f(v^{-1}sv) = f(s)$$

2. ראינו את הנוסחה הזו כבר בהקשר של ההצגה המושרית.

■

בעבר הגדרנו, עבור שתי העתקות $\varphi_1, \varphi_2 : G \rightarrow \mathbb{C}$

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \varphi_1(s^{-1}) \varphi_2(s)$$

אם V_1, V_2 שני מודולים מעל $\mathbb{C}[G]$, נגדיר

$$\langle V_1, V_2 \rangle_G = \dim \text{Hom}^G(V_1, V_2)$$

למה 1.9 אם φ_1 הכרקטר של V_1 , φ_2 הכרקטר של V_2 , אזי

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_G = \langle V_1, V_2 \rangle_G$$

הוכחה: מספיק להתבונן בהצגות אי פריקות (שכן אחרת נפרק לסכום ישר וזה ינבע). במצב זה, נקבל שזה נובע מלמת שור - $\langle V_1, V_2 \rangle_G$ הוא 0 או 1 לפי האם V_1, V_2 איזומורפיות, $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle_G$ באותה צורה מיחסי האורתוגונליות שראינו. ■

כעת תהי $H \leq G$. אם $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, נסמן $f|_H = \text{Res} f$, ואם V הצגה של G נכתוב $\text{Res} V$ את ההצגה המצומצמת:

$$H \hookrightarrow G \xrightarrow{\rho} GL(V)$$

משפט 1.10 (הדדיות פרובניוס) אם ψ פונקציית מחלקות על H , φ פונקציית מחלקות על G , אזי

$$\langle \psi, \text{Res} \varphi \rangle_H = \langle \text{Ind} \psi, \varphi \rangle_G$$

הוכחה: נניח כי ψ היא הכרקטר של ההצגה W של H , φ היא הכרקטר של ההצגה E של G . לפי הלמה הקודמת, מספיק להראות כי

$$\dim \text{Hom}^H(W, \text{Res} E) = \langle W, \text{Res} E \rangle_H = \langle \text{Ind} W, E \rangle_G = \dim \text{Hom}^G(\text{Ind} W, E)$$

בשביל זה, מספיק להראות איזומורפיזם:

$$\text{Hom}^H(W, \text{Res} E) \rightarrow \text{Hom}^G(\text{Ind} W, E)$$

■

וראינו את האיזומורפיזם הזה בהערה 1.1.