<u>הצגות של חבורות סופיות</u>

© ארזים

1 בדצמבר 2016

1 הצגות מושרות

בהינתן חבורות $H \leq G$, מגדירים את קוסטים של H להיות $\sigma = sH$ לכל $s \in G$, ואת G/H להיות קבוצת הקוסטים. כמובן,

$$\left|G/H\right| = \frac{|G|}{|H|}$$

אם G סופית.
בהנתן הצגה $\rho : G \to GL(V)$ של G ראינו שאפשר לצמצם:

$$\rho_H = \rho\mid_H : H \to GL(V)$$

יהי $s \in G$, ותהי W תת הצגה של ρ_H, כלומר תת מרחב $W \subseteq V$ ששמור תחת פעולת H. כמובן שהמרחב $\rho_s W \subseteq V$ תלוי רק בקוסט sH. נוכל להגדיר

$$W_\sigma = \rho_s W$$

עבור $s \in \sigma$ כלשהו (מוגדר היטב בכל מקרה). אזי

$$\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma$$

שמור תחת פעולת G.

הגדרה 1.1 הצגה ρ של G במרחב V נקראת <u>מושרית</u> על ידי הצגה θ של H במרחב W אם

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$$

וכמובן שמתקיים

$$\dim V = \dim W \cdot [G : H]$$

דוגמאות

1. תהי V ההצגה הרגולרית של G, כלומר עם בסיס $(e_t)_{t\in G}$, ועם הפעולה

$$\rho_s e_t = e_{st}$$

המרחב $W = \operatorname{span}(e_t)_{t\in H}$ נשמר תחת H, וכמובן שההצגה V מושרית על ידי W, כאשר $W_\sigma = \langle e_s \mid s\in\sigma\rangle$.

2. ניקח מרחב V עם בסיס $(e_\sigma)_{\sigma\in G/H}$, ונגדיר

$$\rho_s e_\sigma = e_{s\sigma}$$

וזו כמובן מושרית על ידי ההצגה הטריוויאלית במרחב $W = \mathbb{C}e_H$.

3. אם ρ_1,ρ_2 מושרות על ידי θ_1,θ_2, אזי $\rho_1\oplus\rho_2$ מושרית על ידי $\theta_1\oplus\theta_2$.

4. אם (V,ρ) מושרית על ידי (W,θ), $W_1\subseteq W$ תת מרחב שמור תחת H, אזי

$$V_1 = \sum_{r\in R}\rho_r(W_1)$$

כאשר R קבוצת נציגים של G/H. אזי למעשה V_1 מושרית על ידי W_1.

5. אם ρ_G מושרית על ידי θ של H, ρ' הצגה של G, ρ'_H הצמצום של (V',ρ') על H, אזי $\rho\otimes\rho'$ מושרית על ידי $\theta\otimes\rho'_H$ במרחב $W\otimes V'$, ששמור על ידי H, ואז $V=\bigoplus W_\sigma$, ואז

$$V\otimes V' = \bigoplus W_\sigma\otimes V'$$

1.1 קיום ויחידות

למה 1.2 נניח כי (V,ρ) מושרית על ידי (W,θ). תהי $\rho' : G\to GL(V)$ הצגה של G, ותהי $f : W\to V'$ העתקה לינארית המקיימת

$$f(\theta_t w) = \rho'_t f(w)$$

לכל $t\in H$ ולכל $w\in W$. אזי קיימת ויחידה העתקה לינארית $F : V\to V'$ המרחיבה את f והמקיים $F\circ\rho_s = \rho'_s\circ F$ לכל $s\in G$.

הוכחה: אם F כזו ואם $x\in\rho_s W$, אזי $\rho_s^{-1}x\in W$. לכן

$$F(x) = F\left(\rho_s\rho_s^{-1}x\right) = \rho_s F\left(\rho_s^{-1}x\right) = \rho'_s f\left(\rho_s^{-1}x\right)$$

לכן F חייבת להיות מוגדרת באופן הזה, ולכן יחידה.
כעת, יהי $x \in W_\sigma$. נבחר $s \in \sigma$ ונגדיר את F על W_σ על ידי

$$F\left(x\right) = \rho'_s f\left(\rho_s^{-1} x\right)$$

זה לא תלוי בבחירת $s \in \sigma$ שכן אם $st \in \sigma$, $t \in H$, אזי

$$\rho'_{st} f\left(\rho_{st}^{-1} x\right) = \rho'_s \rho'_t f\left(\theta_t^{-1} \rho_s^{-1} x\right) = \rho'_s f\left(\theta_t \theta_t^{-1} \rho_s^{-1} x\right) = \rho'_s f\left(\rho_s^{-1} x\right)$$

■

משפט 1.3 תהי (W, θ) הצגה של H. אזי קיימת הצגה (V, ρ) של G המושרית על ידי (W, θ), והיא יחידה עד כדי איזומורפיזם.

הוכחה: קיום: לפי דוגמה 3 שלמעלה, ניתן להניח כי θ אי פריקה. במקרה זה θ תת הצגה של ההצגה הרגולרית של H. לכן אפשר להשרות את reg_H להצגה הרגולרית של G. לפי דוגמה 4, אפשר להשרות את תת ההצגה θ של reg_H.
יחידות: תהיינה (V, ρ),(V', ρ') שתי הצגות המושרות על ידי (W, θ). נשתמש בלמה לגבי השיכון של W בתוך V', ואנו רואים שקיימת העתקה לינארית $F : V \to V'$ בין ההצגות על W, שמקיימת

$$F \circ \rho_s = \rho'_s \circ F$$

לכל $s \in G$. כמובן $W \supseteq \mathrm{Im} F$, וכן לכל $\rho'_s W$, ולכן F על V'. אם כן, נקבל

$$\dim V = \left[G : H\right] \dim W = \dim V'$$

ולכן הן איזומורפיות. ■

משפט 1.4 תהי (W, θ) הצגה עם כרקטר χ_θ שמשרה את (V, ρ) עם הכרקטר χ_ρ. יהי $h = |H|$, ותהי R קבוצת נציגים של הקוסטים של H. אזי לכל $u \in G$ מתקיים

$$\chi_\rho\left(u\right) = \sum_{\substack{r \in R \\ rhr^{-1} \in H}} \chi_\theta\left(rur^{-1}\right) = \frac{1}{h} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}us \in H}} \chi_\theta\left(s^{-1}us\right)$$

בפרט, $\chi_\rho\left(u\right)$ הוא סכום של χ_θ על החתוך של H עם המחלקה של u.

הוכחה: נכתוב $V = \bigoplus \rho_r W$. ρ_u מתמיר את תתי המרחבים $\rho_r W$, כי ניתן לכתוב $ur = r_u t$, כאשר $r_u \in R, t \in H$, ואזי

$$\rho_u \rho_r W = \rho_{r_u} W$$

כמובן מתקיים

$$\chi_\rho(u) = \mathrm{Tr}_V(\rho_u)$$

האינדקסים r עבורם $r_u \neq r$ לא נותנים דבר לעקבה - מרחב עובר למרחב אחר, לכן אין כניסות על האלכסון. כשזה כן קורה, למעשה מתקיים $\rho_u W_r = W_r$.
כעת מתקיים

$$\chi_\rho(u) = \sum_{r \in R_u} \mathrm{Tr}_{\rho_r W} \rho_{u,r}$$

כאשר $R_u = \{r \in R \mid r_u = r\}$, וכן $\rho_{u,r} = \rho_u \mid_{\rho_r W}$. נשים לב שמתקיים

$$r \in R_u \iff ur = rt, t \in H \iff r^{-1}ur = t \in H$$

לכן R_u הוא בדיוק חיתוך החלקה של u עם H. נותר לחשב את העקבה שבסכום.
ρ_r נותן איזומורפיזם $W \cong \rho_r W$, ומתקיים

$$\rho_r \circ \theta_t = \rho_{u,r} \circ \rho_r$$

ניקח $t = r^{-1}ur$, ונקבל

$$\mathrm{Tr}(\rho_{u,r}) = \mathrm{Tr}(\theta_t) = \chi_\theta(t) = \chi_\theta\left(r^{-1}ur\right)$$

אם $s \in G$, אזי $s = rt$ עבור איזשהן $r \in R, t \in H$, עם

$$\begin{aligned} s^{-1}us &= t^{-1}\left(r^{-1}ur\right)t \\ \chi_\theta\left(s^{-1}us\right) &= \chi_\theta\left(r^{-1}ur\right) \end{aligned}$$

ולכן נקבל את הסכום שרצינו. ■

1.2 ההדדיות של פרובניוס

הנסוחה היא כזו:

$$(f_H, \chi_\theta)_H = (f, \chi_\rho)_G$$

כאשר f היא פונקציית מחלקות על G, וכן $f_H = f \mid_H$.

2 דוגמאות

1. ניקח C_n, חבורה ציקלית מסדרת n. אם r יוצר, אזי $r^n = 1$, וכל ההצגות חייבות להיות ממימד 1, כי החבורה אבלית. לכן ההצגות הן בדיוק

$$\mathrm{Hom}\left(C_n, \mathbb{C}^*\right)$$

נניח כי

$$\begin{aligned} \rho &= \chi \\ \rho\left(r\right) &= W \in \mathbb{C}^* \\ r^n &= 1 \\ W^n &= \mathrm{Id} \end{aligned}$$

כמו כן, כל W שהוא שורש יחידה מסדר n מגדיר הצגה של C_n. כלומר

$$W = e^{2\pi i \frac{h}{n}}$$

ואז מתקיים

$$\chi_n\left(r^k\right) = e^{2\pi i \frac{hk}{n}}$$

ואז הכרקטרים עצמם הם חבורה.
למשל, עבור $n = 3$, ניקח $w = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. החבורה הדיהדרלית D_n - ובה n סיבובים, n שיקופים. נוצרת על ידי

$$\begin{aligned} r^n &= 1 \\ s^2 &= 1 \\ srs^{-1} &= r^{-1} \end{aligned}$$

כל איבר ניתן לכתוב על ידי אחד מהבאים:

$$r^k, sr^k$$

עבור $0 \leq k < n$. תת חבורת הסיבובים היא C_n (ציקלית). כמו כן,

$$\left(sr^k\right)^2 = sr^k sr^k = \left(srs^{-1}\right)^k r^k = \left(r^{-1}\right)^k r^k = 1$$