הצגות של חברות סופיות

ארזים ©

24 בנובמבר 2016

1 תורת הכרקטרים - המשך

1.1 פונקציות מחלקה - המשך

בשיעור שעבר ראינו כמה משפטים. עוד מסקנה מהם היא הטענה הבאה.

טענה 1.1 תהי G חבורה סופית מסדר g, ויהיו χ_i הכרקטרים האי פריקים שלה. יהי $s \in G$ ונסמן בתור $c(s)$ את גודל מחלקת המידות של s. אזי:

1.

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\chi_i(s)} \chi_i(s) = \frac{g}{c(s)}$$

2. לכל t שאינו צמוד של s מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\chi_i(s)} \chi_i(t) = 0$$

הוכחה: תהי f_s הפונקציה השווה לאחת על מחלקת הצמידות של s, ושווה לאפס אחרת. f_s היא פונקציית מחלקות, ולכן ממשפט מהשיעור שעבר נוכל לכתוב

$$f_s = \sum_{i=1}^{n} (f_s, \chi_i) \chi_i = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^{n} \chi_i \left(\sum_{t \in G} f_s(t) \overline{\chi_i(t)} \right) = \frac{c(s)}{g} \sum_{i=1}^{n} \chi_i \cdot \overline{\chi_i(s)}$$

לכן

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{g} \sum_{i=1}^{n} \chi_i(t) \overline{\chi_i(s)}$$

עבור $t=s$, מקבלים

$$\begin{aligned} f_s(s) &= 1=\frac{c(s)}{g}\sum_{i=1}^{n}\chi_i(s)\overline{\chi_i(s)} \\ \frac{g}{c(s)} &= \sum_{i=1}^{n}\overline{\chi_i(s)}\chi_i(s) \end{aligned}$$

עבור t שאינו צמוד של s:

$$\begin{aligned} f_s(t) &= 0=\frac{c(s)}{g}\sum_{i=1}^{n}\chi_i(t)\overline{\chi_i(s)} \\ 0 &= \sum_{i=1}^{n}\chi_i(t)\overline{\chi_i(s)} \end{aligned}$$

■

1.2 הפירוק הקנוני של הצגה פריקה

תהי G חבורה מסדר g, ותהי $\rho: G\to GL(V)$ הצגה. יהיו $W_1,\dots,W_h$כל ההצגות האי פריקות השונות של G, בעלות כרקטרים χ_i ומימדים n_i. נוכל לכתוב

$$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_n$$

כאשר U_i כולן אי פריקות. אבל פירוק זה לא יחיד. לעומת זאת, נוכל לכתוב

$$V_i=\bigoplus_{U_j\cong W_i}U_j$$

הגדרה 1.2 הפירוק

$$V=\bigoplus_{i=1}^{h}V_i$$

נקרא <u>הפירוק הקנוני</u> של ההצגה V.

משפט 1.3 1. הפירוק הקנוני הוא יחיד, כלומר הוא לא תלוי בפירוק לאי פריקות שממנו התחלנו.

2. ההטלה $p_i: V\to V_i$ לקואורדינטה i נתונה על ידי הנוסחה:

$$p_i=\frac{n_i}{g}\sum_{t\in G}\overline{\chi_i(t)}\rho(t)$$

הוכחה: נגדיר

$$q_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t\in G} \overline{\chi_i(t)} \rho(t)$$

לפי טענה שראינו, הצמצום של q_i על תת הצגה אי פריקה $V \subseteq W$ אם כרקטר χ ממעלה n הוא הומוטתיה:

$$q_i \mid_W = \frac{n_i}{n_W} (\chi_i, \chi_W) \operatorname{Id}_W$$

נוכיח את הסקלר: נגדיר עבור פונקציית מחלקות f,

$$\rho_f = \sum_{t\in G} f(t) \rho_t$$

ראינו גם את ההגדרה הזו כבר, וראינו כי

$$\rho_f = \left(\frac{1}{n} \sum_{t\in G} f(t) \chi_\rho(t) \right) \operatorname{Id}_V$$

ניקח

$$f(t) = \frac{n_i}{g} \overline{\chi_i(t)}$$

ואז נקבל

$$\rho_f = \frac{1}{n} \sum_{t\in G} \frac{n_i}{g} \overline{\chi_i(t)} \cdot \chi_\rho(t) \operatorname{Id}_V = \frac{n_i}{n} \frac{1}{g} \sum_{t\in G} \overline{\chi_i(t)} \chi_\rho(t) \operatorname{Id}_V = \frac{n_i}{n} (\chi_i, \chi_\rho) \operatorname{Id}_V$$

אם $\chi_i \neq \chi$ נקבל $\lambda = 0$ (הסקלר), ואם $\chi_i = \chi$ נקבל $\lambda = 1$. לכן עבור $x = x_1 + \cdots + x_h$, נקבל

$$\begin{aligned} q_i(x_i) &= x_i, q_i(x_j) = 0 \ \ \forall j \neq i \\ q_i(x) &= x_i \end{aligned}$$

ולכן זו אכן ההטלה. ככה הוכחנו גם את היחידות. ■

דוגמא נגדיר $G = \{1, s\}$, $s^2 = 1$. יש לה שתי הצגות אי פריקות ־ הטריוויאלית, וזו שעבורה $s \to -1$. לכל הצגה W נוכל לכתוב

$$W = W^+ \oplus W^-$$

כאשר W^+ הוא סכום ישר של עותקים של ההצגה הטריוויאלית, ובהתאם W^-.

$$\begin{aligned} W^+ &= \{x \in W \mid \rho_s x = x\} \\ W^- &= \{x \in W \mid \rho_s x = -x\} \end{aligned}$$

אזי ההטלות הן

$$\begin{aligned} p^+ x &= \frac{1}{2}(x + \rho_s x) \\ p^- x &= \frac{1}{2}(x - \rho_s x) \end{aligned}$$

2 תת חבורות, מכפלות והצגות מושרות

2.1 חבורות אבליות

תהי G חבורה אבלית, כלומר לכל $s, t \in G$ מתקיים $st = ts$. מתקיים לכן $sts^{-1} = t$, ולכן יש מחלקת צמידות לכל איבר. לכן, כל פונקציה מתוך G היא פונקציית מחלקה.

משפט 2.1 התנאים הבאים שקולים:

1. G אבלית.
2. כל ההצגות האי־פריקות של G הן ממעלה 1.

הוכחה: נסמן $|G| = g$, וכן $n_1, \ldots, n_h$ המימדים של ההצגות האי פריקות של G. אזי ידוע כי מתקיים

$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = g$$

אם G אבלית, אזי $h = g$, ולכן כל $n_i = 1$. אם כל $n_i = 1$, נובע כי בהכרח $h = g$, ולכן G אבלית - יש מחלקת צמידות לכל איבר. ■

טענה 2.2 אם G חבורה אבלית <u>לאו דווקא סופית</u>, אזי כל הצגה אי פריקה של G היא ממעלה 1.

הוכחה: ברור כי עבור ההצגה ρ מתקיים לכל s, t:

$$\rho_s \rho_t = \rho_t \rho_s$$

נקבע s, אזי ρ_s מתחלף עם כל ρ_t. לכן ρ_s הוא איזומורפיזם של הצגות, ומלמת שור הוא מקיים $\rho_s = \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$. לכן כל תת מרחב של V הוא אינווריאנטי לפעולת G, ולכן אם ρ אי פריקה, היא בהכרח ממעלה 1. ■

מסקנה 2.3 תהי A תת חבורה אבלית של חבורה G. נסמן $|G| = g, |A| = a$. אזי המעלה של כל הצגה אי פריקה של G הוא לכל היותר האינדקס של A בתוך G, $[G : A] = \frac{g}{a}$.

הוכחה: תהי $\rho : G \to GL(V)$ הצגה אי פריקה של G. נצמצם את ρ על A. נקבל הצגה $\rho_A : A \to GL(V)$.תהיי $W \subseteq V$ תת הצגה אי פריקה של A. לפי המשפט הקודם, $\dim W = 1$.

יהי V' תת המרחב של V שנוצר על ידי התמונות $\rho_s W$לכל $s \in G$. נובע כי V' אינווריאנטי תחת G, אבל V אי פריקה, ולכן $V' = V$.

עבור $s \in G, t \in A$ מקבלים

$$\rho_{st} W = \rho_s \rho_t W = \rho_s W$$

נבחר $s_1, s_2, \ldots, s_{\frac{g}{a}}$ נציגים של הקוסטים של A, ואז לכל $s \in G$ מתקיים

$$\rho_s W \in \left\{ \rho_{s_1} W, \ldots, \rho_{s_{\frac{g}{a}}} W \right\}$$

כמובן, כל $\rho_{s_i} W$ ממימד 1, וסכומם הוא כל V (אולי לא סכום ישר), ולכן

$$\dim V \leq \frac{g}{a}$$

■

דוגמא ניקח את החבורה D_{2n}, ובתוכה את תת החבורה C_n שהיא אבלית, ונקבל כי כל הצגה אי פריקה של D_{2n} היא ממימד לכל היותר $[D_{2n} : C_n] = 2$.

2.2 הצגות של מכפלה ישרה

בהינתן שתי חבורות G_1, G_2, ניזכר במכפלה הישרה שלהן - $G = G_1 \times G_2$ - שאיבריה הם איברי המכפלה הקרטזית, והכפל בה מתבצע לפי קואורדינטה.

ניקח הצגה $\rho_1 : G_1 \to GL(V_1)$, והצגה $\rho_2 : G_2 \to GL(V_2)$. נוכל להגדיר בעזרתן הצגה

$$\begin{aligned} \rho : G &\to GL(V_1 \otimes V_2) \\ \rho(s_1, s_2) &:= (\rho_1 \otimes \rho_2)(s_1, s_2) = \rho_1(s_1) \otimes \rho_2(s_2) \end{aligned}$$

כמובן מתקיים

$$\chi(s_1, s_2) = \chi_1(s_1) \cdot \chi_2(s_2)$$

אם $G = G_1 = G_2$, ניתן לשכן $G \to G \times G$ על ידי האלכסון, ואז הצמצום של ρ על האלכסון נותן הצגה פריקה חדשה של G.

משפט 2.4 1. אם $\rho_1 : G_1 \to GL(V_1)$, $\rho_2 : G_2 \to GL(V_2)$ הצגות אי פריקות, אזי ההצגה $\rho_1 \otimes \rho_2$ של $G_1 \times G_2$ היא אי פריקה.

2. כל הצגה אי פריקה של $G_1 \times G_2$ ניתן להציג כטנזור של הצגות אי פריקות של G_1, G_2.

הוכחה: מתקיים

$$\chi\left(s_1, s_2\right)=\chi_1\left(s_1\right) \cdot \chi_2\left(s_2\right)$$

ידוע לנו כי

$$\frac{1}{g_i} \sum_{s_i \in G_i}\left|\chi_i\left(s_i\right)\right|^2=1$$

עבור $i \in\{1,2\}$. נרצה לחשב את

$$\frac{1}{g_1 g_2} \sum_{s_1, s_2}\left|\chi_1\left(s_1\right) \chi_2\left(s_2\right)\right|^2=\left(\frac{1}{g_1} \sum_{s_1}\left|\chi_1\left(s_1\right)\right|^2\right)\left(\frac{1}{g_2} \sum_{s_2}\left|\chi_2\left(s_2\right)\right|^2\right)=1$$

את החלק השני לא נעשה כאן, אבל ניתן להיווכח כי כל המכפלות האלה שונות, וכי יש לחבורה $G_1 \times G_2$ כמות מחלקות צמידות שהיא מכפלת הכמות של G_1, G_2, ומכאן לסיים: אם n_i^1 הם המימדים של ההצגות האי פריקות של G_1, ובדומה n_j^2, נקבל

$$\sum_{i, j}\left(n_i^1 n_j^2\right)^2=\left(\sum_i\left(n_i^1\right)^2\right)\left(\sum_j\left(n_j^2\right)^2\right)=g_1 g_2=\left|G_1 \times G_2\right|$$

■

2.3 הצגות מושרות

יהיו $H \leq G$ חבורות. כמון, נוכל להגדיר לכל $s \in G$ את הקוסט שלו, sH, ואת המנה, $G/H=\{sH \mid s \in G\}$, שגודלה $[G:H]=\frac{|G|}{|H|}$.

תהי $\rho: G \rightarrow GL(V)$ הצגה של G. נתבונן בצמצום על H של ρ:

$$\rho_H=\rho\left.\right|_H: G \rightarrow GL(V)$$

תהי $W \subseteq V$ תת הצגה של ρ_H, כלומר תת מרחב יציב תחת פעולת H. יהי $s \in G$. נתבונן במרחב $\rho_s W$. אם $t \in H$ אזי $\rho_{st} W=\rho_s \rho_t W=\rho_s W$, ולכן נעבור לדבר על $\sigma \in G/H$, עבורה נגדיר

$$W_\sigma=\rho_s W, s \in \sigma$$

כמובן שזה לא תלוי בבחירת s. כמובן, G פועלת על G/H על ידי $s \cdot \sigma \rightarrow s\sigma$. כעת מתקיים

$$\rho_s W_\sigma=\rho_s \rho_{s'} W=\rho_{ss'} W=W_{s\sigma}, s' \in \sigma$$

לכן מקבלים כי G פועלת על $\{W_\sigma\}$. כעת נוכל לכתוב

$$\sum_{\sigma\in G/H} W_\sigma \subseteq V$$

מרחב זה שמור תחת G, מהנוסחה שראינו לפני רגע:

$$\rho_s W_\sigma = W_{s\sigma}$$

הגדרה 2.5 אומרים כי ההצגה ρ של G במרחב V מושרית על ידי הצגה θ של H במרחב W אם מתקיים

$$V = \bigoplus_{\sigma\in G/H} W_\sigma$$

בפרט, במצב זה, מתקיים

$$\dim V = [G:H]\cdot \dim W$$

נרצה לכתוב את ההגדרה מעט אחרת: לכל $x\in V$, ניתן לכתוב באופן יחיד:

$$x = \sum_{\sigma\in G/H} x_\sigma$$

כאשר $x_\sigma \in W_\sigma$. לחילופין, אם $R\subseteq G$ מערכת נציגים של הקוסטים של H, אזי

$$V = \bigoplus_{r\in R} \rho_r W$$

דוגמאות

1. ניקח את V להיות ההצגה הרגולרית של G, כלומר יש בסיס $(e_t)_{t\in G}$, ופעולה

$$\rho_s e_t = e_{st}$$

ניקח את W להיות המרחב שנפרש על ידי $(e_t)_{t\in H}$, עבור תת חבורה $H\leq G$. נגדיר את θ להיות ההצגה הרגולרית של H על W. מההגדרה, ברור כי V מושרית על ידי W.

2. עבור $H \leq G$, נגדיר את המרחב V להיפרש על ידי $(e_\sigma)_{\sigma \in G/H}$. נגדיר את ההצגה ρ של G במרחב V לפי

$$\rho_s e_\sigma = e_{s\sigma}$$

הצגה זו מושרית על ידי ההצגה הטריוויאלית θ של H במרחב $W = \mathbb{C} \cdot e_1$, שוב בבירור מההגדרה.

3. נניח כי ρ_1 של G מושרית על ידי θ_1 של H, וכי ρ_2 מושרית על ידי θ_2 (גם של G, H בהתאמה). ברור כי $\rho_1 \oplus \rho_2$ מושרית על ידי $\theta_1 \oplus \theta_2$.