הצגות של חבורות סופיות

ⓒ ארזים

17 בנובמבר 2016

1 תורת הכרקטרים

1.1 אורתוגונליות של כרקטרים

הגדרה 1.1 סימון עבור שתי פונקציות ϕ,ψ מחבורה G מסדר g אל $\mathbb{C}$, נגדיר

$$\left\langle \phi,\psi\right\rangle =\frac{1}{g}\sum_{t\in G}\phi\left(t\right)\psi\left(t^{-1}\right)$$

זוהי תבנית בי לינארית סימטרית. מלמת שור , אם ρ^{1},ρ^{2} שתי הצגות אי פריקות לא איזומורפיות של G, בהנחה שהמטריצה של ρ^{1} היא $\left(r_{i_{1},j_{1}}\right)$ והמטריצה של ρ^{2} היא $\left(r_{i_{2},j_{2}}\right)$, אזי

$$\left\langle r_{i_{2},j_{2}},r_{j_{1},i_{1}}\right\rangle =0$$

ואם $\rho^{1}=\rho^{2}$ מתקיים

$$\left\langle r_{i_{2},j_{2}},r_{j_{1},i_{1}}\right\rangle =\frac{1}{n}\delta_{i_{1},i_{2}}\delta_{j_{1},j_{2}}$$

ראינו כל זאת בשיעור הקודם. כעת נגדיר

$$\left(\phi,\psi\right)=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}\phi\left(t\right)\overline{\psi\left(t\right)}$$

ראינו שלכל הצגה קיימת מכפלה פנימית אינווריאנטית בשיעור הראשון, על ידי ממוצע. על ידי לקיחת בסיס אורתונורמלי, נקבל שהמטריצה $r_{i,j}$ אוניטרית, כלומר

$$r_{j,i}\left(t\right)=\overline{r_{i,j}\left(t\right)}$$

נשים לב כי $\left(\cdot,\cdot\right)$ היא מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. כעת נקבל כי אם ρ^{1},ρ^{2} הצגות אוניטריות אי פריקות לא איזומורפיות, אזי

$$\left(r_{i_{1},j_{1}},r_{i_{2},j_{2}}\right)=0$$

לעומת זאת אם $\rho^1 = \rho^2 = \rho$ הצגה אוניטרית אי פריקה עם מטריצה $(r_{i,j})$ אזי

$$(r_{i_1,j_1}, r_{i_2,j_2}) = \frac{1}{n}\delta_{i_1,i_2}\delta_{j_1,j_2}$$

משפט 1.2 1. אם χ כרקטר של הצגה אי פריקה, אזי $(\chi,\chi) = 1$.

2. אם χ, χ' כרקטרים של שתי הצגות אי פריקות לא איזומורפיות, אזי $(\chi,\chi') = 0$.

הוכחה: ■

.1

$$(\chi,\chi) = \left(\sum_i r_{i,i}, \sum_j r_{j,j}\right) = \sum_{i,j}(r_{i,i}, r_{j,j}) = \sum_{i,j}\frac{1}{n}\delta_{i,j} = n\cdot\frac{1}{n} = 1$$

.2

$$(\chi,\chi') = \left(\sum_{i_1} r_{i_1,i_1}, \sum_{i_2} r_{i_2,i_2}\right) = \sum_{i_1,i_2}(r_{i_1,i_1}, r_{i_2,i_2}) = 0$$

משפט 1.3 תהי V הצגה לינארית של G עם כרקטר χ. נניח כי V מתפרק לסכום ישר של העתקות אי פריקות:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$$

בנוסף, תהי W הצגה אי פריקה עם כרקטר χ. אזי מספר ההצגות W_i שאיזומורפיות להצגה W הוא בדיוק (ϕ,χ).

הוכחה: נסמן $\chi_i = \operatorname{char}(W_i)$. אם כן נקבל

$$(\phi,\chi) = \sum_i(\chi_i,\chi) = |\{i \mid (\chi_i,\chi) = 1\}| = |\{i \mid W \cong W_i\}|$$

■

מסקנה 1.4 כמות ההצגות W_i שאיזומורפיות להצגה W אינה תלוייה בפירוק.

-

מסקנה 1.5 שתי הצגות עם אותו כרקטר הן איזומורפיות.

נשים לב כי מרחב הפונקציות $f:G\to\mathbb{C}$ הוא ממימד $|G|$, וכן כל שני כרקטרים הם אורתוגונליים ־ לכן יש לכל היותר $|G|$ הצגות אי פריקות לא איזומורפיות. בפרט מספר זה סופי.

יהיו $W_1,\ldots,W_h$ ההצגות האי פריקות של G, ויהיו $\chi_1,\ldots\chi_h$ הכרקטרים שלהם (כרקטר של הצגה אי פריקה ייקרא כרקטר אי פריק). כל הצגה V של G איזומורפית לסכום הישר $m_1W_1\oplus\cdots\oplus m_hW_h$ עבור שלמים $m_1,\ldots,m_h$ כלשהם. הכרקטר ϕ של V היא כמובן $\sum m_i\chi_i$. כעת מתקיים

$$(\phi,\phi)=\sum_{i=1}^{h}m_i^2$$

שכן הכרקטרים אורתוגונליים.

משפט 1.6 אם ϕ הכרקטר של הצגה $V\neq 0$, אזי (ϕ,ϕ) הוא שלם וחיובי, וכן $(\phi,\phi)=1$ אם ורק אם V אי פריקה.

הוכחה: ראינו כי $(\phi,\phi)=\sum m_i^2$ עבור שלמים m_i, ולכן ברור כי זהו שלם חיובי. הוא שווה לאחד אם ורק אם $m_i=1$ עבור i מסויים ולכל $j\neq i$ מתקיים $m_j=0$, כלומר $V\cong W_i$.
■

1.2 הפירוק של ההצגה הרגולרית

יהיו $\chi_1,\ldots,\chi_n$ הכרטקרים האי פריקים של G, מסדר g. נסמן $n_i=\chi_i(1)$. תהי $\{e_t\}_{t\in G}$ קבוצת איברים. נגדיר את ההצגה הרגולרית R:

$$\rho_se_t=e_{st}$$

כמובן, לכל $s\neq 1$ מתקיים $st\neq t$ לכל t. לכן לכל $s\neq 1$, $0=r_G(s)=\operatorname{tr}(\rho_s)$, כאשר r_G הכרקטר של R. כמו כן, $r_G(1)=\operatorname{tr}(I_g)=g$.

קיבלנו טריוויאלית את הטענה הבאה:

טענה 1.7 הכרקטר r_G של R הוא

$$r_G(t)=\begin{cases}g & t=1\\ 0 & t\neq 1\end{cases}$$

מסקנה 1.8 כל הצגה אי פריקה W_i מופיעה בפירוק ההצגה הרגולרית עם ריבוי השווה למימד שלה, n_i.

הוכחה: ממשפט שראינו, הריבוי של W_i הוא

$$(r_G,\chi_i)=\frac{1}{g}\sum_{t\in G}r_G\left(t^{-1}\right)\chi_i(t)=\frac{1}{g}\cdot g\cdot\chi_i(1)=\chi_i(1)=n_i$$

■

מסקנה 1.9 1. המימדים n_i מקיימים

$$\sum_i n_i^2 = g$$

2. אם $1 \neq s \in G$ אזי

$$\sum_i n_i \chi_i (s) = 0$$

הוכחה: נוכיח את שני הסעיפים יחד. לכל $s \in G$, מתקיים

$$r_G (s) = \sum n_i \chi_i (s)$$

אם $s = 1$, אזי

$$g = r_G (s) = \sum n_i n_i = \sum n_i^2$$

אם $s \neq 1$, אזי

$$0 = r_G (s) = \sum n_i \chi_i (s)$$

■

הערה 1.10 נניח כי בידינו הצגות אי פריקות של G, $W_1, \ldots, W_n$. תנאי הכרחי ומספיק לכך שהן כל ההצגות האי פריקות הוא שסכום ריבועי מימדיהן הוא $|G|$.

1.3 כמות ההצגות האי פריקות של חבורה

הגדרה 1.11 פונקציה $f : G \to \mathbb{C}$ נקראת פונקצית מחלקות אם לכל $t, s \in G$ מתקיים

$$f \left(tst^{-1} \right) = f (s)$$

אם נסמן בתור H את מרחב פונקציות המחלקות של G, אזי בבירור הוא ממימד ששווה לכמות מחלקות הצמידות.

טענה 1.12 תהי f פונקציית מחלקות על G, חבורה מסדר g. תהי $\rho : G \to GL (V)$ הצגה לינארית של G. נגדיר העתקה לינארית על V:

$$\rho_f = \sum_{t \in G} f (t) \rho_t$$

אם ρ הצגה אי פריקה ממעלה n עם כרקטר χ, אזי ρ_f היא הומותטיה מהצורה $\lambda \cdot \mathrm{Id}_V$, עבור

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum f (t) \chi (t) = \frac{g}{n} (f, \overline{\chi})$$

הוכחה: נשתמש בלמת שור. נרצה להראות כי ρ_f הומומורפיזם של הצגות, כלומר

$$\rho_f \rho_s = \rho_s \rho_f$$

נחשב:

$$\rho_s^{-1} \rho_f \rho_s = \sum_{t \in G} f\left(t\right) \rho_s^{-1} \rho_t \rho_s = \sum_{t \in G} f\left(t\right) \rho_{s^{-1}ts} = \sum_{u \in G} f\left(sus^{-1}\right) \rho_u = \sum_{u \in G} f\left(u\right) \rho_u = \rho_f$$

ולכן קיבלנו את השוויון שרצינו. לפי למת שור, כל הומומורפיזם של הצגה אי פריקה לעצמה הוא הומותטיה. כדי לחשב את הסקלר λ נחשב את העקבה:

$$\begin{aligned} \lambda n &= \operatorname{tr}\left(\lambda \cdot \mathrm{Id}_V\right) = \operatorname{tr}\left(\rho_f\right) = \sum_{t \in G} f\left(t\right) \operatorname{tr}\left(\rho_t\right) = \sum_{t \in G} f\left(t\right) \chi\left(t\right) \\ \lambda &= \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f\left(t\right) \chi\left(t\right) = \frac{g}{n} \frac{1}{g} \sum_{t \in G} f\left(t\right) \overline{\overline{\chi\left(t\right)}} = \frac{g}{n} \left(f, \overline{\chi}\right) \end{aligned}$$

■

שוב, נסמן בתור H את מרחב פונקציות המחלקות על G. יהיו $\chi_1, \ldots, \chi_h$ הכרקטרים האי פריקים של G, שבבירור שייכים כולם למרחב H.

משפט 1.13 $\chi_1, \ldots, \chi_h$ הם בסיס אורתונורמלי של H.

הוכחה: מספיק להוכיח שהכרקטרים האי פריקים פורשים את H - כבר ראינו שהם אורתונורמליים, ומכאן גם נובעת אי תלות. למעשה, מספיק להראות כי כל איבר של H שאורתוגונלי לכל $\overline{\chi_i}$ הוא 0.

יהי $f \in H$ איבר כזה. בהינתן הצגה הגדרנו את

$$\rho_f = \sum_{t \in G} f\left(t\right) \rho_t$$

נובע כי אם ρ אי פריקה, אזי $\rho_f = 0$, שכן

$$\rho_f = \frac{g}{n} \left(f, \overline{\chi}\right) \cdot \mathrm{Id}_V$$

ולקחנו f אורתוגונלית לכל $\overline{\chi}$. מהפירוק לאי פריקות, $\rho_f = 0$ לכל הצגה ρ. בפרט זה נכון להצגה הרגולרית R. עבור איבר בסיס פורמלי, ניקח איבר בו e_1 בשביל ההצגה הרגולרית, ונקבל

$$\rho_f e_1 = \sum_{t \in G} f\left(t\right) \rho_t e_1 = \sum_{t \in G} f\left(t\right) e_t = 0$$

לכן נובע כי $f\left(t\right) = 0$ לכל $t \in G$, כלומר $f = 0$. ■

משפט 1.14 מספר ההצגות האי פריקות הלא איזומורפיות של חבורה G הוא כמספר מחלקות הצמידות של G.

הוכחה: המרחב H הוא ממימד שהוא מספר מחלקות הצמידות, כפי שכבר ציינו. כמו כן ראינו כי הכרקטרים האי פריקים הם בסיס שלו, כלומר יש אותה כמות מהם. ■

טענה 1.15 יהי $s \in G$, ונסמן בתור $c(s)$ את כמות האיברים במחלקת הצמידות של s.

1.

$$\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)}\chi_i(s) = \frac{g}{c(s)}$$

2. עבור $t \in G$ שאינו צמוד של s, מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\chi_i(s)}\chi_i(t)$$

הוכחה: תהי f_s פונקציית המחלקות שמקבלת 1 על מחלקת הצמידות של s, ואפס על כל מחלקה אחרת. ניתן לכתוב

$$f_s = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i\chi_i, \lambda_i = (f_s, \chi_i) = \frac{c(s)}{g}\overline{\chi_i(s)}$$

לכל $t \in G$ מתקבל

$$f_s(t) = \frac{c(s)}{g}\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(s)}\chi_i(t)$$

וזה נותן את א' בהצבת $t = s$, ואת ב' אם t אינו צמוד של s. ■

דוגמא ניקח את S_3. הגודל $g = 6$. מחלקות הצמידות הן

$$\{1\}, \{(1,2), (2,3), (1,3)\}, \{(1,2,3), (1,3,2)\}$$

נתבונן בהצגות האי פריקות. בבירור יש את ההצגה הטריוויאלית ממימד 1, ואת הצגת הסימן, גם היא ממימד 1. צריכות להיות 3, כמספר המחלקות, וסכום הריבועים צריך להיות 6 - לכן ההצגה החסרה היא ממימד 2 . נסמן $c = (1,2,3)$, $t = (1,2)$. נסמן גם χ_1 הכרקטר של ההצגה הטריוויאלי, χ_2 הכרקטר של הצגת הסימן, ואת θ הכרקטר החסר. כמו כן, r_G יהיה הכרקטר של ההצגה הרגולרית. מתקיים $\chi_1+\chi_2+2\theta = r_G$. כעת, נוכל לחשב:

$$\theta(1) = 2, \theta(t) = 0, \theta(c) = -1$$

וכמובן שאיברים אלה יוצרים את G ולכן זה מספיק. נרצה לבנות הצגה שלה כרקטר θ.

יש הצגה ברורה ממימד 3: מרחב עם בסיס e_1, e_2, e_3, ופרמוטציות עליו. נסמן את הכרקטר של ההצגה הזו φ. אזי $\varphi(1) = 3, \varphi(t) = 1, \varphi(c) = 0$. כדי לחשב את כמות הגורמים בה, נחשב

$$(\phi, \phi) = \frac{1}{6}\left(3^2 + 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0^2\right) = 2$$

זהו סכום הריבויים בריבוע - לכן ההצגה היא סכום של שתי הצגות אי פריקות, בהכרח. תת הצגה אחת ברורה היא $\mathbb{C}\left(e_1 + e_2 + e_3\right)$, ותת הצגה נוספת היא $\{x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. הכרקטר של הראשונה הוא הטריוויאלי, וחישוב פשוט נותן שהכרקטר של השנייה הוא θ.

כעת ניקח הצגה ρ_θ שהכרקטר שלה θ. ההצגה $\rho_\theta \otimes \rho_\theta$ היא ממימד 4, והכרקטר θ^2. כדי להשיג את הפירוק שלה, נחשב לכל כרקטר אי פריק χ את הריבוי על ידי $\left(\theta^2, \chi\right)$. כך נחשב פירוק לפי הכרקטרים. אבל מה אם נרצה למצוא את הפירוק להצגות עצמן?

1.4 הפירוק הקנוני של הצגה

הגדרה 1.16 תהי $\rho : G \to GL(V)$ הצגה לינארית של G. יהיו $\chi_1, \ldots, \chi_h$ הכרקטרים של $W_1, \ldots, W_h$, ההצגות האי פריקות של G, עם מימדים $n_1, \ldots, n_h$. נכתוב $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ פירוק של V להצגות אי פריקות. נגדיר

$$\begin{aligned} I_i &= \{j \mid U_j \cong W_i\} \\ V_i &= \bigoplus_{j \in I_i} U_j \end{aligned}$$

נגדיר את <u>הפירוק הקנוני</u> של V להיות

$$V = \bigoplus_{i=1}^{h} V_i$$

משפט 1.17 1. הפירוק הקנוני $V = \bigoplus V_i$ לא תלוי בפירוק המקורי $V = \bigoplus U_i$.

2. ההטלה $p_i : V \to V_i$ נתונה על ידי נוסחה שתלוייה רק בחבורה G ובהצגה V. בשיעור הבא נכתוב את הנוסחה ונוכיח את המשפט.