הצגות של חבורות סופיות

ⓒ ארזים

26 בינואר 2017

1 משפט ברנסייד

משפט 1.1 (ברנסייד) יהיו p,q ראשוניים . תהי G חבורה מסדר $p^a q^b$, $a,b \geq 0$. אזי G פתירה.

הוכחה: באינדוקציה על $|G|$. אפשר להניח כי $|G| > 1$.
נבחר תת חבורה נורמלית מקסימלית נאותה $N \lhd G$. אם $|N| > 1$, אזי $\left|G/N\right| < |G|$, וכן $|N| < |G|$. לפי הנחת האינדוקציה נקבל כי N, G/N פתירות. לכן G חבורה פתירה.
כעת, נניח כי $|N| = 1$. כלומר נקבל כי G פשוטה (אולי אבלית ואולי לא אבלית). תהי $P \neq \{1\}$ חבורת p־סילוב של G (אם אין, G חבורת q ואז נילפוטנטית, ובפרט פתירה).
נבחר $1 \neq z \in Z(P)$ (יש כזה כי בכל חבורת p לא טריוויאלית יש מרכז לא טריוויאלי).
נכתוב $Cent(z)$ עבור המרכז של z בתוך G ־ אזי $P \subseteq Cent(z)$.
תהי $Cl(z)$ מחלקת הצמידות של z בתוך G. אזי

$$|Cl(z)| = |G| \, / \, |Cent(z)| = q^{b-r}$$

כאשר $r \geq 0$. לפי משפט קודם, אם G פשוטה לא אבלית, אז בהכרח $z = 1$. לכן G אבלית. לכן G פתירה. ■

2 הצגות ממשיות

תהי $\rho_0 : G \to GL(V_0)$ הצגה מעל $\mathbb{R}$. נגדיר

$$V = V_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

אזי מקבלים הצגה מרוכבת

$$G \to GL_{\mathbb{R}}(V_0) \hookrightarrow GL_{\mathbb{C}}(V)$$

הגדרה 2.1 תהי (V,ρ) הצגה מרוכבת של G. אם קיימת הצגה (V_0,ρ_0) כך שמתקיים

$$(V_0,\rho_0) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = (V,\rho)$$

אז אומרים כי (V,ρ) ניתנת למימוש מעל $\mathbb{R}$.

נרצה לגלות מתי הצגה היא ניתנת למימוש מעל $\mathbb{R}$. אינטואיטיבית, היינו אולי חושבים שזה קורה אם כל ערכי הכרקטר הם ממשיים ־ אבל מסתבר שזה לא נכון. דוגמה נגדית:
ניקח את $Q_8=\{\pm1,\pm i,\pm j,\pm k\}$, עם הכפל

$$\begin{aligned} &i^2=j^2=k^2=ijk=-1\\ &ij=k=-ji\\ &jk=i=-kj\\ &ki=j=-ik \end{aligned}$$

נוכל לשכן את Q_8 בתוך $SU(2)$ ־ נשכן אותה ראשית בתוך $\mathbb{H}$, חוג הקווטרניונים הממשיים, שזו אלגברה ממימד 4 מעל הממשיים. נגדיר לה הצגה מרוכבת על ידי כפל מימין.
נקבל כך הצגה מרוכבת של Q_8 ־ ולא רק זה, על ידי מטריצות אוניטריות מדטרמיננטה 1. לכן הערכים העצמיים של המטריצות הם שורשי יחידה, וכן מכפלתם 1 ־ לכן לכל מטריצה, 2 הערכים העצמיים שלה הם צמודים, ולכן סכומם, העכבה, ממשי. עם זאת, היא לא ניתנת למימוש מעל $\mathbb{R}$ ־ אם כן, המטריצות שם היו בתוך $SO(2)$ ־ וזו חבורה אבלית. Q_8 לא אבלית.

משפט 2.2 (פרובניוס ־ שור) תהי $\rho:G\to GL(V)$ הצגה לינארית של G מעל $\mathbb{C}$ עם כרקטר χ.

1. כל הערכים של χ הם ממשיים אם ורק אם יש למרחב V תבנית בי לינארית לא מנוונת אינווריאנטית תחת G.
2. ρ ניתנת למימוש מעל $\mathbb{R}$ אם ורק אם יש למרחב V תבנית בי לינארית <u>סימטרית</u> לא מנוונת אינווריאנטית תחת G.

הוכחה:

1. G פועלת על V', המרחב הדואלי של V, באופן טבעי: בוחרים בסיס, ואז אם $\rho(s)=M_s$ אזי $\rho'(s)=M^t_{s^{-1}}$ (שחלוף הופך את סדר הכפל וכך גם הופכי ־ בסך הכל הכפל נשאר כמו שצריך). כעת,

$$\chi'(s)=\chi\left(s^{-1}\right)=\chi(s)^*$$

כל הערכים של χ הם ממשיים אם ורק אם $\chi'=\chi$, כלומר אם ורק אם $\rho\cong\rho'$. כל איזומורפיזם של V, V' מגדיר תבנית בי לינארית לא מנוונת של V, ומשום שזה איזומורפיזם של הצגות, התבנית גם תכבד את G. כמו בן שבכיוון ההפוך, תבנית כזו תיתן איזומורפיזם כזה, כלומר הכרקטרים שווים ־ ולכן כל הערכים ממשיים.

2. נניח כי ρ ניתנת למימוש מעל $\mathbb{R}$. ניקח V_0 עובור

$$V=V_0\oplus iV_0=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V_0$$

אזי $V_0 \subseteq V$ תת מרחב מעל $\mathbb{R}$, וכן הוא יציב תחת G. על V_0 קיימת תבנית ריבועית מוגדרת חיובית G אינווריאנטית. ממנה נקבל תבנית בילינארית סימטרית לא מנוונת, G אינווריאנטית. אם ניקח $\otimes\mathbb{C}$, נשמור עליה ככה ־ הדטרמיננטה נשמרת, ולכן היא עדיין לא מנוונת. ברור כי היא מקיימת את כל הדרישות.
להיפך, נניח כי על V יש תבנית $B\left(x,y\right)$ כזו. נבחר מכפלה סקלרית הרמיטית מוגדרת חיובית $\left(\cdot,\cdot\right)$ G אינווריאנטית. כעת, לכל $x\in V$ קיים ויחיד $\varphi\left(x\right)\in V$ עבורו

$$B\left(x,y\right)=\left(\varphi\left(x\right),y\right)$$

φ היא חד־חד־ערכית ועל וכן אנטי לינארית:

$$\varphi\left(\lambda x\right)=\lambda^{*}\varphi\left(x\right)$$

לכן φ^{2} לינארית ואיזומורפיזם. כעת, עבור $x,y\in V$ מתקיים

$$\left(\varphi^{2}\left(x\right),y\right)=B\left(\varphi\left(x\right),y\right)^{*}=B\left(y,\varphi\left(x\right)\right)^{*}=\left(\varphi\left(y\right),\varphi\left(x\right)\right)^{*}$$

מאחר ומתקיים

$$\left(\varphi\left(y\right),\varphi\left(x\right)\right)=\left(\varphi\left(x\right),\varphi\left(y\right)\right)^{*}$$

נקבל כי

$$\left(\varphi^{2}\left(x\right),y\right)=\left(\varphi^{2}\left(y\right),x\right)^{*}$$

כלומר φ^{2} הרמיטית, ובפרט ניתנת ללכסון. יתר על כן,

$$\left(\varphi^{2}\left(x\right),x\right)=\left(\varphi\left(x\right),\varphi\left(x\right)\right)$$

לכן נקבל כי φ^{2} מוגדרת חיובית. לכן כל הערכים העצמיים הם חיוביים. המטריצה φ^{2} ניתנת ללכסון, ותהי Λ קבוצת הערכים העצמיים של φ^{2}. נוכל לכתוב

$$V=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}V_{\lambda}$$

כאשר

$$V_{\lambda}=\left\{ x\in B\mid\varphi^{2}\left(x\right)=\lambda x\right\}$$

כמובן, φ מתחלף עם φ^{2}, ולכן

$$\varphi\left(V_{\lambda}\right)=V_{\lambda}$$

נגדיר

$$v=\sqrt{\varphi^2}$$

אם $x\in V_\lambda$, אזי

$$vx=\sqrt{\lambda}x$$

כלומר המרחבים העצמיים של v הם אותם V_λ. לכן נקבל כי $\varphi v=v\varphi$, שכן $\varphi\left(V_\lambda\right)=V_\lambda$. נגדיר

$$\sigma=\varphi v^{-1}$$

אזי

$$\sigma^2=\varphi^2 v^{-2}=\varphi^2\left(\varphi^2\right)^{-1}=\mathrm{Id}$$

φ אנטי לינארית, ולכן גם σ אנטי לינארית. כעת, $\sigma^2=1$, ולכן נוכל לכתוב

$$\begin{aligned} V&=V_+\oplus V_-\\ V_+&=\{x\in V\mid \sigma(x)=x\}\\ V_-&=\{x\in V\mid \sigma(x)=-x\}\end{aligned}$$

ניקח $x\in V_+$, אזי

$$\sigma(ix)=-i\sigma(x)=-ix$$

כלומר

$$iV_+=V_-$$

לכן נקבל

$$V=V_+\oplus iV_+$$

לכן נקבל כי V_+ היא מימוש של ρ.

■

2.1 הצגות אי פריקות מעל $\mathbb{C}$ ומעל $\mathbb{R}$

יש 3 מקרים. תהי ρ הצגה אי פריקה של G מעל $\mathbb{C}$ עם כרקטר χ.

1. אם קיים $s \in G$ עבורו $\chi(s) \notin \mathbb{R}$, אזי בוודאי ρ לא ניתנת למימוש מעל $\mathbb{R}$. בעזרת צמצום סקלרים אל $\mathbb{R}$, ρ מגדירה הצגה מעל $\mathbb{R}$ ממימד כפול, עם כרקטר $\chi + \chi^*$. זו הצגה אי פריקה, שכן המרכז של כל ρ_s הוא $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, ולכן האנדומורפיזמים שלה ממימד 2 מעל $\mathbb{R}$ - הם לא יכולים להיות $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, אחרת היו איברים e עבורם $e^2 = e$, ואז נקבל תתי מרחבים אינווריאנטיים - בסתירה לאי פריקות. לכן האנדומורפיזמים של ההצגה הם $\mathbb{C}$.

2. $\chi(s) \in \mathbb{R}$ לכל $s \in G$, וכן ρ ניתנת למימוש מעל $\mathbb{R}$ על ידי V_0. אזי ρ_0 אי פריקה (ואפילו אי פריקה לחלוטין). הכרקטר שלה הוא כמובן אותו χ. אזי המרכז של כל ρ_s הוא $\mathbb{C}$, ולכן האנדומורפיזמים הם $\mathbb{R}$ (מימד 1 מעל $\mathbb{R}$).

3. $\chi(s) \in \mathbb{R}$ לכל $s \in G$ אבל ρ לא ניתנת למימוש מעל $\mathbb{R}$. שוב נבצע צמצום סקלרים אל $\mathbb{R}$, ונקבל הצגה ממימד כפול, עם כרקטר 2χ. זו הצגה באותו מרחב V. מה האנדומורפיזמים של V? מעל $\mathbb{C}$ הם $M_2(\mathbb{C})$, ולכן מעל $\mathbb{R}$ צריכים להיות ממימד 4 - כלומר $\mathbb{H}$.

קיבלנו למעשה מצב אחד לכל אלגברת חילוק אפשרית מעל $\mathbb{R}$.

כעת, תהי (V, ρ) הצגה אי פריקה מעל $\mathbb{C}$.

טענה 2.3 אם אין תבנית בילינארית G אינווריאנטית לא טריוויאלית, אזי אנחנו במקרה 1. אם יש תבנית כזו אז היא סימטרית או אנטי סימטרית. אם היא סימטרית, אנחנו במקרה 2, ואם היא אנטי סימטרית, אנחנו במקרה 3.

הוכחה: תהי $B \neq 0$ בי לינארית אינווריאנטית תחת G. היא מגדירה הומומורפיזם של הצגות $b : V \to V'$. V, V' אי פריקות, ולכן b איזומורפיזם. לכן B לא מנוונת. לכן אכן מספיק שאין תבנית לא טריוויאלית כדי להיות במקרה 1. כעת נניח כי קיימת כזו תבנית. נוכל לכתוב

$$B = B_+ + B_-$$
$$B_+(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x))$$
$$B_-(x, y) = \frac{1}{2}(B(x, y) - B(y, x))$$

מלמת שור, מרחב האיזומורפיזמים בין V, V' הוא חד מימדי. אם גם B_+ וגם B_- אינן 0, נקבל מימד לפחות 2 - ולכן $B_+ = 0$ או $B_- = 0$. לפי משפט שראינו, אם $B_- = 0$, B סימטרית, ולכן ρ ניתנת למימוש מעל $\mathbb{R}$ - כלומר אנחנו במקרה 2. אם $B_+ = 0$, B אנטי סימטרית, ונותר לנו רק מקרה 3. ■

טענה 2.4 תהי ρ הצגה אי פריקה מעל $\mathbb{C}$ של G, עם כרקטר χ. נגדיר

$$FS(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi(s^2)$$

אזי לפי הערך של FS נדע מה המקרה המתאים להצגה:

$$FS\left(\chi\right)=\begin{cases}1 & case\ 2\\ 0 & case\ 1\\ -1 & case\ 3\end{cases}$$

הוכחה: ניזכר בריבוע הסימטרי ובריבוע החילופין

$$\chi_{\sigma}^{2}\left(s\right)=\frac{1}{2}\left(\chi\left(s\right)^{2}+\chi\left(s^{2}\right)\right)$$
$$\chi_{a}^{2}\left(s\right)=\frac{1}{2}\left(\chi\left(s\right)^{2}-\chi\left(s^{2}\right)\right)$$

נגדיר a_{+} מריבוי 1 בתוך $\mathrm{Sym}^{2}\left(\rho\right)$, וכן a_{-} מריבוי 1 בתוך $\mathrm{Alt}^{2}\left(\rho\right)$. אזי

$$a_{+}=\left\langle 1,\chi_{\sigma}^{2}\right\rangle$$
$$a_{-}=\left\langle 1,\chi_{a}^{2}\right\rangle$$

כעת,

$$V\otimes V\cong V'\otimes V'$$

$$\mathrm{Sym}^{2}\left(V'\right)\cong\left(\mathrm{Sym}^{2}\left(V\right)\right)'$$
$$\mathrm{Alt}^{2}\left(V'\right)\cong\left(\mathrm{Alt}^{2}\left(V\right)\right)'$$

לכל הצגה W של G, מתקיים

$$\left\langle W,1\right\rangle =\left\langle W',1\right\rangle$$

לכן נקבל כי a_{+} הוא המימד של מרחב התבניות הבי לינאריות הסימטריות על V שאינווריאנטיות תחת G. אותו דבר נכון עבור a_{-} ותבניות אנטי סימטריות. אלה הם 0 או 1, מלמת שור - כאשר לא שניהם 1 בבת אחת.
כעת,

$$FS\left(\chi\right)=\frac{1}{\left|G\right|}\sum_{s\in G}\chi\left(s^{2}\right)=\frac{1}{\left|G\right|}\sum_{s\in G}\left(\frac{1}{2}\left(\chi\left(s\right)^{2}+\chi\left(s^{2}\right)\right)\right)-\frac{1}{\left|G\right|}\sum_{s\in G}\left(\frac{1}{2}\left(\chi\left(s\right)^{2}-\chi\left(s^{2}\right)\right)\right)=$$
$$=a_{+}-a_{-}$$

לכן נקבל בדיוק את מה שהיה כתוב בטענה - מקרה 1 עבור $a_{+}=0,a_{-}=0$, מקרה 2 עבור $a_{+}=1,a_{-}=0$, ומקרה 3 עבור $a_{+}=0,a_{-}=1$. ■