חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 4

ארזים ©

24 באפריל 2017

תרגיל (ממבחן של לב) יהיו $M,N\subseteq\mathbb{R}^{3}$ משטחים (יריעות ממימד 2), ונניח כי $M\cap N=\{x\}$. הראו כי $T_{x}M=T_{x}N$.

פתרון תהי $U\subseteq\mathbb{R}^{3}$ ותהיינה $F,G:\mathbb{R}^{3}\to\mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$\nabla G\mid_{U\cap N},\nabla F\mid_{U\cap M}\neq0$$

וכן

$$M\cap U=\{F=0\}$$
$$N\cap U=\{G=0\}$$

כעת, $T_{x}M=\left(\nabla F\right)^{\perp}$, $T_{x}N=\left(\nabla G\right)^{\perp}$. אם $\nabla F,\nabla G$ תלויים לינארית נסיים. נניח בשלילה שהם לא תלויים לינארית. נגדיר

$$H\left(y\right)=\left(F\left(y\right),G\left(y\right)\right)$$

מההנחה, $D_{x}H$ היא מדרגה מלאה, ולכן $\{y\mid H\left(y\right)=\left(0,0\right)\}$ היא יריעה ממימד 1, בסתירה לכך שמתקיים

$$\{y\mid H\left(y\right)=\left(0,0\right)\}\cap U=\{x\}$$

תרגיל תהי $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$, $f:A\to\mathbb{R}^{n}$. אזי:

1. f בעלת תומך קומפקטי בתוך A אם ורק אם קיימת $K\subseteq A$ קופקטית עם $f\mid_{A\backslash K}=0$.
2. אם A פתוחה וכן f בעלת תומך קופקטי בתוך A, אזי קיימת $K\subseteq K'\subseteq A$ מדידה ז'ורדן וקומפקטית.

פתרון 1 ברור. נפתור את 2.
תהי f בעלת תומך קומפקטי K בתוך קבוצה פתוחה A. לכל $x\in K$ קיימת תיבה

פתוחה B_x המקיימת $x \in B_x$, $\overline{B_x} \subseteq A$. K קופקטית, ואוסף אותן B_x הוא כיסוי פתוח של K, ולכן קיים לו תת כיסוי סופי $\left\{B_{x_j}\right\}_{j=1}^{N}$. נגדיר

$$K' = \bigcup_{j=1}^{n} \overline{B_{x_j}} \subseteq A$$

ברור כי K' קופקטית, כאיחוד סופי של קופקטיות, ומדידה ז'ורדן כאיחוד סופי של תיבות. לכן סיימנו.

שאלה האם כל קבוצה קופקטית (או פתוחה) היא מדידה ז'ורדן?

תשובה לא! ניקח $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$, ותהי $\{q_n\}$ מנייה של E. נגדיר

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

אזי A פתוחה, $[0,1] \setminus A$ קופקטית, ושתיהן אינן מדידות ז'ורדן.

הרעיון (כתרגיל) נשים לב כי $J_n = \left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)$ מקיימות $A = \bigcup J_n$. ניתן לכסות את A על ידי אינטגרוולים שסכום אורכיהם 2ε. מצד שני, A צפופה בתוך $[0,1]$ ולכן $\overline{A} = [0,1]$. A פתוחה, ולכן

$$\overline{A} = A \cup \partial A$$

אם A מדידה ז'ורדן, אזי לכל $\delta > 0$ ניתן לכסות את ∂A על ידי קטעים $\{I_j\}$ שסכום אורכיהם לכל היותר δ. מצאו את הסתירה.

תרגיל תהי $M \subseteq \mathbb{R}^n$ יריעה k מימדית ותהי $E \subseteq M$ קבוצה. נניח שקיימת משפה של מפות $r_\alpha : V_\alpha \to M$, כאשר $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^k$ פתוחות, וכן לכל α מתקיים $r_\alpha^{-1}(E) \subseteq \mathbb{R}^k$ זניחה, עם $E \subseteq \bigcup r_\alpha(V_\alpha)$. הוכיחו כי E זניחה בתוך M.

פתרון נראה שלכל V פתוחה ולכל מפה $r : V \to M$ מתקיים $r^{-1}(E) \subseteq \mathbb{R}^k$ זניחה.
נקבע V פתוחה, $r : V \to M$. לכל $x \in r^{-1}(E)$ קיים α עבורו $r(x) \in r_\alpha(V_\alpha)$.
אזי קיימת תיבה ראציונאלית $x \in Q_x \subseteq V$ עם $r(Q_x) \subseteq r_\alpha(V_\alpha)$, ולכן

$$Q_x \cap r^{-1}(E) = r^{-1} \circ r_\alpha \left(r_\alpha^{-1}\left(r(Q_x) \cap E\right)\right)$$

ממשפט מהכיתה, $r^{-1} \circ r_\alpha$ היא דיפאומורפיזם. כמו כן

$$r_\alpha^{-1}\left(\underbrace{E \cap r(Q_x)}_{\subseteq E}\right) \subseteq r_\alpha^{-1}(E)$$

הקבוצה הימנית זניחה, ולכן גם השמאלית. נסיק כי לכל $x \in r^{-1}(E)$, הקבוצה $Q_x \cap r^{-1}(E)$ זניחה (דיפאומורפיזם משמר זניחות). לכן גם $r^{-1}(E) \subseteq \mathbb{R}^k$ זניחה (איחוד בן מניה של זניחות הוא זניח).

תרגיל תהי $\gamma = (f(u), g(u))$ עקומה במישור xz בתוך $\mathbb{R}^3$. נניח כי $f > 0$. נסובב את γ סביב ציר z ונקבל משטח R המיוצג על ידי הפרמטריזציה

$$r(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

1. חשבו מישור משיק בנקודה $r(u_0, v_0)$.
2. חשבו ווקטור נורמל בנקודה $r(u_0, v_0)$.

פתרון 1. מחשבים ומקבלים

$$T_x R = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} f'\cos v \\ f'\sin v \\ g' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f\sin v \\ -f\cos v \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. מסמנים $\vec{n} = \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$, ואז הנורמל הוא $\pm\frac{\vec{n}}{||\vec{n}||}$. התוצאה היא

$$\vec{n} = (-g' f\cos v, -g' f\sin v, ff')$$