פונקציות ממשיות

ארזים ©

13 בדצמבר 2016

תרגיל הוכיחו כי "החלפת משתנה לינארית היא חוקית". כלומר, בהינתן $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית לבג, לכל $a>0,b\in\mathbb{R}$ נגדיר $Tx=ax+b$, ואז יתקיים

$$\int f\left(Tx\right)\,\mathrm{d}m\left(x\right)=\frac{1}{a}\int f\left(x\right)\,\mathrm{d}m\left(x\right)$$

פתרון נפתור בשלבים.

1. אינדיקטורים:
   - נגדיר את המידה $\nu\left(A\right)=\mu\left(T^{-1}A\right)$. זו מידה, ומשום משום שההעתקות T,T^{-1} רציפות, זו אותה סיגמא אלגברה.
   - נראה שעל אינטרוולים מתקיים $\nu\left(I\right)=\frac{1}{a}m\left(I\right)$:

$$\nu\left(I\right)=m\left(T^{-1}I\right)=\frac{\beta-b}{a}-\frac{\alpha-b}{a}=\frac{q}{a}\left(\beta-a\right)=\frac{1}{a}m\left(I\right)$$

   - T,T^{-1} חד־חד־ערכיות, ולכן אם $I_1\cap I_2=\emptyset$ אז גם $T^{-1}I_1\cap T^{-1}I_2=\emptyset$. לכן השוויון שהראינו מתקיים גם לאיחודים זרים סופיים של קטעים. נגדיר $\mathcal{B}$ להיות הסיגמא אלגברה שנוצרת על ידי האלגברה הנוצרת על ידי קטעים. ממשפט קרתאודורי, השוויון שראינו מתקיים לכל קבוצה מדידה. לכן נקבל כי

$$\int 1_A\left(Tx\right)\,\mathrm{d}m\left(x\right)=\int 1_{T^{-1}A}\left(x\right)\,\mathrm{d}m\left(x\right)=m\left(T^{-1}A\right)=\frac{1}{a}m\left(a\right)=\frac{1}{a}\int 1_A\left(x\right)\,\mathrm{d}m\left(x\right)$$

   ולכן עבור אידניקטורים סיימנו.

2. עבור פונקציות פשוטות,

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_j1_{A_j}$$

   אזי מתקיים

$$\int\varphi\left(Tx\right)=\sum_{j=1}^{n}a_j\int 1_{A_j}\left(Tx\right)=\sum_{i=1}^{n}a_j\frac{1}{a}\int 1_{A_j}\left(x\right)=\frac{1}{a}\int\varphi\,\mathrm{d}m$$

3. עבור פונקציות אינטגרביליות כלליות, ניקח f אינטגרבילית. fT מדידה (כי TI אינטרוול לכל אינטרוול I). ניקח $\varphi \leq f$ פשוטה. היות וההעתקות T, T^{-1} מונוטוניות עולות ממש, $\varphi T \leq fT$. אז בעצם יש שוויון:

$$\int fT(x)\,\mathrm{d}m = \sup_{\varphi \leq fT} \int \varphi\,\mathrm{d}m = \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi T\,\mathrm{d}m(x) = \frac{1}{a} \sup_{\varphi \leq f} \int \varphi\,\mathrm{d}m = \frac{1}{a} \int f\,\mathrm{d}m$$

תרגיל תהי A מדידה עם $m(A) > 0$. נסמן

$$d_A(I) = \frac{m(I \cap A)}{m(I)}$$

הראו שלכל $\varepsilon > 0$ קיים אינטרוול I עבורו $d_A(I) > 1 - \varepsilon$.

פתרון נקבע $\varepsilon > 0$ (בלי הגבלת הכלליות $\varepsilon < \frac{1}{10}$). משום שאנחנו עובדים עם הסיגמה אלגברה של בורל, מתרגיל בית קיימת קבוצה

$$E = \biguplus_{j=1}^{N} I_j$$

עבור I_j אינטרוולים זרים כך שמתקיים $m(A\Delta E) < \varepsilon m(A)$ (בלי הגבלת הכלליות $m(A) < \infty$). אזי

$$\frac{m(E \cap A)}{m(E)} = \frac{m(E) - m(E \backslash A)}{m(E)} = 1 - \frac{m(E \backslash A)}{m(E)} \geq 1 - \frac{m(A\Delta E)}{m(E)} \overset{*}{>} 1 - \frac{\varepsilon m(A)}{(1-\varepsilon)\,m(A)} > 1 - 2\varepsilon$$

במעבר $*$ השתמשנו בכך שמתקיים

$$m(A) = m(E \cap A) + m(E^c \cap A) \leq m(E) + m(A\Delta E) \leq m(E) + \varepsilon m(A)$$
$$m(E) > (1-\varepsilon)\,m(A)$$

נקבל בסך הכל כי

$$(1-2\varepsilon)\,m(E) \leq m(E \cap A) = \sum_{j=1}^{N} m(A \cap I_j) = \sum_j \frac{m(A \cap I_j)}{m(I_j)} m(I_j)$$
$$(1-2\varepsilon) \sum_j I_j = (1-2\varepsilon)\,m(E) \leq \sum_j c_j m(I_j)$$

לכן קיים j_0 עבורו $1 - 2\varepsilon \leq c_{j_0}$, ואז I_{j_0} מקיים $d_A(I_{j_0}) > 1 - 2\varepsilon$.

תרגיל תהי A מדידה עם $m(A) > 0$. אזי הקבוצה

$$A - A = \{x - y \mid x, y \in A\}$$

מכילה אינטרוול לא מנוון סביב 0.

פתרון נראה סקיצה כללית, אם לא נספיק להוכיח הכל יישארו חלקים כתרגילי בית. יהי I כך שמתקיים $d_A\left(I\right)>0.9999$. נראה שלכל $\varepsilon<\frac{m(I)}{3}$, נראה כי $\varepsilon\in A-A$. כיצד? נקבע ε שכזה ונניח בשלילה כי $\varepsilon\notin A-A$. נחלק את I לאינטרוולים באורך ε (אולי חוץ מהאחרון). לכל $x\in I_1$, כלומר באינטרוול השמאלי ביותר מבין אלה, נגדיר $a_j\left(x\right)=x+\varepsilon j$. באינדוקציה, $a_j\left(x\right)\in I_{j+1}$ לכל $1\leq j\leq N-1$, כאשר N הוא כמות האינטרוולים הללו. אם $A_j\left(x\right),A_{j+1}\left(x\right)\in A$ אזי

$$\varepsilon=A_{j+1}\left(x\right)-A_j\left(x\right)\in A-A$$

בסתירה. לכן לכל היותר חצי מהאיברים $a_j\left(x\right)$ נמצאים בתוך A, לכל $x\in I_1$. נגדיר

$$g_j\left(x\right)=1_A\left(a_j\left(x\right)\right)$$

תרגיל בית - להוכיח שזה מדיד. כעת, נקודתית,

$$\sum_{j=1}^{N}g_j\left(x\right)\leq\frac{N}{2}$$

כמובן מתקיים

$$m\left(A\cap I\right)=\sum_j m\left(A\cap I_j\right)=\sum\int 1_{A\cap I_j}\left(y\right)$$

כעת, $y\in I_j\cap A$ אם ורק אם קיים ויחיד $x\in I_1$ עבורו $y=x+\varepsilon\left(j-1\right)$, כלומר אם ורק אם $g_{j-1}\left(x\right)=1$. לכן

$$m\left(A\cap I\right)=\sum_j\int\limits_{I_1}g_j\left(x\right)\leq\int\limits_{I_1}\frac{N}{2}\,\mathrm{d}m=\varepsilon\cdot\frac{N}{2}\leq\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{m\left(I\right)}{\varepsilon}+1\right)<0.6m\left(I\right)$$

בסתירה לצפיפות $d_A\left(I\right)$.