פונקציות ממשיות

ארזים ©

6 בדצמבר 2016

טענה 0.1 אם f חסומה בקטע $[a,b]$ ואינטגרבילית רימאן, אזי f אינטגרבילית לבג וגם

$$\int f\,\mathrm{d}m = \int f\,\mathrm{d}x$$

כאשר m מידת בורל־לבג (נניח $f \geq 0$ בלי הגבלת הכלליות).

הוכחה: בתרגיל בית 5 מראים שאם f אינטגרבילית רימאן אז קיימות h_n, g_n פשוטות עבורן $h_n(x) \leq f(x) \leq g_n(x)$, כאשר $\int h_n - g_n \to 0$.
את מדידות f מראים כתרגיל (רמז: $h_n \to f$ כמעט בכל מקום).
כעת נקבע φ פשוטה עבורה $\varphi \leq f$ ונראה כי מתקיים

$$\int \varphi \leq \lim_{k\to\infty} \int h_k = \int f$$

הכיוון השני של האי שוויון ברור שכן

$$\int f\,\mathrm{d}m = \sup_{\varphi \leq f \; is\; simple} \int \varphi\,\mathrm{d}m \leq \lim_{k\to\infty} \int h_k\,\mathrm{d}m = \lim_{k\to\infty} \int h_k\,\mathrm{d}x = \int f\,\mathrm{d}x$$

אם $f = \varphi$ כמעט בכל מקום, האי שוויון ברור. אחרת, נסמן

$$A = \{x \mid \varphi(x) < f(x)\}$$

נשים לב שמתקיים

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \mid \varphi(x) < f(x) - \frac{1}{n}\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

בשוויון האחרון רק סימנו את הקבוצות. כתרגיל, יש לוודא כי A_n, A מדידות.
אם $m(A) = 0$ אז אנחנו במקרה $f = \varphi$ כמעט בכל מקום. אחרת, מסיגמא אדיטיביות של מידה, קיים n עבורו $m(A_n) = \delta > 0$. משום שהסדרה $\{h_n\}$ מונוטונית עולה וחסומה על ידי f מלמעלה, קיימת L מדידה עבורה $h_n(x) \nearrow L(x)$, ובפרט ממשפט ההתכנסות המונוטונית

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n = \int L$$

כעת נעזר בשתי טענות שנראה בתרגיל בית:

1. לכל $\varepsilon > 0$ קיימת A_ε מדידה עבורה $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$ וגם לכל $x \notin A_\varepsilon$ לכל n מספיק גדול מתקיים $0 \leq L(x) - h_n(x) < \varepsilon$. רמז: $\int L - h_n \to 0$, ומניחים בשלילה.
2. אם f אינטגרבילית אז לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $A \subseteq X$ מדידה מתקיים

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int 1_A \cdot f \, \mathrm{d}\mu$$

כעת, מטענה 2, עבור $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{3n}$ קיים $d > 0$ כך שלכל A מדידה עבורה $m(A) < d$ מתקיים $\int 1_A \cdot \varphi < \varepsilon_0$. כעת נבחר $\varepsilon = \min\left\{d, \frac{\delta}{3n(b-a)}\right\}$, ומטענה 1 קיימת A_ε עם התכונה המבוקשת. לכן מתקיים

$$\forall x \in A_n \backslash A_\varepsilon \;\; h_k(x) - \frac{1}{n} + \varepsilon > L(x) - \frac{1}{n} = f(x) - \frac{1}{n} > \varphi(x)$$
$$\forall x \in A_n^c \backslash A_\varepsilon \;\; h_k(x) + \varepsilon \geq L(x) = f(x) \geq \varphi(x)$$

השתמשנו בזה שבמהלך הוכחת מדידות f, רואים כי $f = L$ כמעט בכל מקום.
כעת, נקבל

$$\begin{aligned}
\int h_k(x)\, \mathrm{d}m &\geq \int\limits_{A_n \backslash A_\varepsilon} h_k(x)\, \mathrm{d}m + \int\limits_{A_n^c \backslash A_\varepsilon} h_k(x)\, \mathrm{d}m \geq \\
&\geq \int\limits_{A_n \backslash A_\varepsilon} \varphi - \frac{1}{n} - \varepsilon + \int\limits_{A_n^c \backslash A_\varepsilon} \varphi - \varepsilon \geq \\
&\geq \int\limits_{[a,b]} \varphi - \int\limits_{A_\varepsilon} \varphi - \varepsilon(b-a) + \frac{1}{n} \cdot m(A_n \backslash A_\varepsilon) \geq \\
&\geq \int \varphi - \frac{\delta}{3n} - \frac{\delta}{3n} + \frac{1}{n}\left(m(A_n) - m(A_\varepsilon)\right) > \\
&> \int \varphi - \frac{2\delta}{3n} + \frac{\delta - \varepsilon}{n} > \int \varphi
\end{aligned}$$

■

משפט 0.2 (הלמה של בורל קנטלי)

1. יהי $(X, \mathcal{B}, \mu)$ מרחב מידה סופי, ותהיינה $A_n \in \mathcal{B}$ כך שמתקיים $\sum \mu(A_n) < \infty$, אזי

$$\mu(\limsup A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0$$

2. אם $\{A_n\}$ מייצגות מאורעים בלתי תלויים בזוגות, כלומר לכל m,n מתקיים $\mu(A_m\cap A_n)=\mu(A_m)\cdot\mu(A_n)$, אזי אם $\sum\mu(A_n)=\infty$ מתקיים

$$\mu(\limsup A_n)$$

מסקנה 0.3 בשפה פשוטה ־ מספיקה אי תלות בתת סדרה. באופן פורמלי, אם קיימת תת־סדרה $\{n_k\}$ כך שהקבוצות $\{A_{n_k}\}$ מייצגות מאורעות בלתי תלויים בזוגות, אזי אם $\sum\mu(A_{n_k})=\infty$ מתקיים

$$\mu(\limsup A_n)=1$$

תרגיל נסמן את התוצאות של הטלת מטבע הוגן בתור $0,1$. הראו כי בסדרה אינסופית של הטלות בלתי תלויות יש אינסוף פעמים מופע של 11.

פתרון נגדיר $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, עם טופולוגיית המכפלה ועם המידה המושרה על ידי $\mu(0)=\mu(1)=\frac{1}{2}$. נסמן כעת

$$A_n=\{x\in X\mid x_n=x_{n-1}=1\}$$

התת סדרה $\{A_{2n}\}$ היא בלתי תלויה בזוגות. וכמובן $\mu(A_{2n})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, ואז $\sum\mu(A_{2n})=\infty$, ולכן מהמסקנה של הלמה

$$\mu(\limsup A_n)=1$$

אולם זה בדיוק אומר שכמעט בכל סדרה אינסופית של הטלות, בכל שלב, כמה רחוק שלא יהיה, יש מופע של $1,1$.