<u>פונקציות ממשיות</u>

ⓒ ארזים

22 בנובמבר 2016

1 מידות

הגדרה 1.1 יהי $(X,\mathcal{B})$ מרחב מדיד. פונקציה $\mu:\mathcal{B}\to[0,\infty]$ תיקרא <u>מידה</u> אם מתקיים:

1. $\mu(\emptyset)=0$.
2. (אי שליליות) $\mu\geq 0$.
3. (אדיטיביות בת מניה) לכל $\{E_n\}\subseteq B$ זרות בזוגות מתקיים $\mu\left(\bigcup E_n\right)=\sum\mu(E_n)$.

μ היא מידת הסתברות אם $\mu(X)=1$. μ תיקרא סיגמא סופית אם קיימים $\{A_n\}\subseteq\mathcal{B}$ כך שמתקיים $\mu(A_n)<\infty$ וגם $X=\bigcup A_n$.

דוגמאות

1. $X=\mathbb{R}$ עם הסיגמא אלגברה של בורל $\mathcal{B}$. נגדיר

   $$\mu(A)=|A\cap\mathbb{Z}|$$

   זו מידה סיגמא סופית, ולא מידת הסתברות.
2. $X=\{1,2,3\},\mathcal{B}=2^X$.

   $$\mu(\{1\})=\frac{1}{2},\mu(\{2\})=\mu(\{3\})=\frac{1}{4}$$

   זו מידת הסתברות.

משפט 1.2 יהי $(X,\mathcal{B})$ מרחב מדיד, ותהי $\mathcal{A}$ אלגברה שיוצרת את $\mathcal{B}$. תהיינה μ,ν 2 מידות כך שמתקיים:

1. לכל $A\in\mathcal{A}$ מתקיים $\mu(A)=\nu(A)$.
2. קיימות $A_n\in\mathcal{A}$ כל שמתקיים $X=\bigcup A_n,\mu(A_n)<\infty$.

אזי $\mu(B)=\nu(B)$ לכל $B\in\mathcal{B}$.

הוכחה: ראשית נראה למה.

למה 1.3 תחת הנחות המשפט, לכל מידה סופית μ, לכל קבוצה $B \in \mathcal{B}$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\mathcal{A} \ni A \subseteq B$ כך שמתקיים $\mu(A\Delta B) < \varepsilon$.

הוכחה: נגדיר

$$\mathcal{C} = \{B \in \mathcal{B} \mid \forall\varepsilon > 0 \exists A \in \mathcal{A}. A \subseteq B \wedge \mu(A\Delta B) < \varepsilon\}$$

בבירור זה מתקיים $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C} \subseteq B$. אם נראה כי $\mathcal{C}$ מחלקה מונוטונית ואלגברה, נקבל $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ ממשפט המחלקה המונוטונית, כפי שרצינו.

אלגברה: בתרגיל הבית.

מחלקה מונוטונית: תהיינה $\{B_n\} \subseteq \mathcal{C}$. בלי הגבלת הכלליות, הן זרות בזוגות, כי אחרת נגדיר $B_n' = B_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i \in \mathcal{C}$ שכן $\mathcal{C}$ אלגברה. יהי $\varepsilon > 0$. משום שהמידה סופית קיים N_0 כך שמתקיים $\mu\left(\bigcup_{n=N_0}^{\infty} B_n\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. כעת, לכל $1 \leq k \leq N_0$, קיימת $A_k \in \mathcal{A}$ כך שמתקיים $\mu(A_k \Delta B_k) < \frac{\varepsilon}{100 \cdot 2^k}$ וגם $A_k \subseteq B_k$, וכן $\{A_k\}$ זרות בזוגות. נשים לב כי

$$1_{A\Delta B} = |1_A - 1_B|$$

ולכן

$$\begin{aligned}\mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \Delta \left(\bigcup_{k=1}^{N_0} A_k\right)\right) &= \int 1_{\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\Delta\left(\bigcup_{k=1}^{N_0} A_k\right)} \mathrm{d}\mu = \int \left|\sum_{n=1}^{\infty} 1_{B_n} - \sum_{k=1}^{N_0} 1_{A_n}\right| \mathrm{d}\mu \leq \\ &\leq \sum_{n=N_0}^{\infty} \mu(B_n) + \sum_{n=1}^{N_0} \mu(A_n \Delta B_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{100} \sum_{n=1}^{N_0} 2^{-n} < \varepsilon\end{aligned}$$

עבור החיתוך של קבוצות, מספיק להניח שהן מוכלות זו בזו. כעת לכל ε קיים N_0 כך שמתקיים

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \setminus B_{N_0}\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

נקרב את החיתוך על ידי הקבוצה שמקרבת את B_{N_0}.

בסך הכל, סיימנו. ∎

כעת נחזור להוכחה של המשפט.

ראשית נניח כי μ סופית. נניח בשלילה כי קיימת $B \in \mathcal{B}$ כך שמתקיים $\mu(B) \neq \nu(B)$.

בלי הגבלת הכלליות $\mu(B) - \nu(B) = \varepsilon > 0$.

מהלמה קיימות קבוצות $A_\varepsilon^1, A_\varepsilon^2 \subseteq B$ כך שמתקיים $\mu(A_\varepsilon^1 \Delta B), \nu(A_\varepsilon^2 \Delta B) < \frac{\varepsilon}{4}$.

נסמן $A_\varepsilon = A_\varepsilon^1 \cap A_\varepsilon^2$, וכעת $\mu(A_\varepsilon \Delta B), \nu(A_\varepsilon \Delta B) < \frac{\varepsilon}{4}$. כעת:

$$\begin{aligned}\mu(B) &\leq \mu(A_\varepsilon) + \mu(A_\varepsilon \Delta B) \leq \nu(A_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{4} < \nu(B) + \nu(A_\varepsilon \Delta B) + \frac{\varepsilon}{4} < \nu(B) + \frac{\varepsilon}{2} \\ \mu(B) - \nu(B) &< \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

בסתירה.

אם μ אינה סופית, קיימות $A_n \in \mathcal{A}$ זרות כך שמתקיים $\mu(A_n) < \infty$ וגם $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. נגדיר

$$\tilde{\mu}(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\mu(B \cap A_n)}{1 + \mu(A_n)}$$

באופן דומה נגדיר $\tilde{\nu}$. לכל $A \in \mathcal{A}$ מתקיים $\tilde{\mu}(A) = \tilde{\nu}(A)$. מהמקרה הראשון, $\tilde{\mu} = \tilde{\nu}$, ולכן לכל n מתקיים

$$\mu(A \cap A_n) = \nu(A \cap A_n)$$

לכל $A \in \mathcal{B}$, ובפרט $\mu = \nu$. ■

מסקנה 1.4 מספיק להגדיר מילה על האלגברה שיוצרת את הסיגמא אלגברה, כל עוד היא סיגמא סופית.