פונקציות ממשיות

ארזים ©

15 בנובמבר 2016

הגדרה 0.1 תהי $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי קטעים פתוחים, שנקראת סיגמא אלגברת בורל. קבוצה $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ נקראת מדידה בורל.

הגדרה 0.2 בהנתן $(X, \mathcal{A})$ מרחב מדיד, ומרחב ומטרי (Y, ρ) מרחב מטרי, פונקציה $f : X \to Y$ נקראת מדידה אם לכל קבוצה פתוחה $A \subseteq Y$ מתקיים $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.

הערה 0.3 למעשה אם $\mathcal{C}$ היא כזו שמקיימת $\mathcal{B}(Y) = \sigma(\mathcal{C})$, אז מספיק לוודא שלכל $A \in \mathcal{C}$ מתקיים $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$.

חימום

טענה 0.4 $A \subseteq X$ מדידה אם ורק אם הפונקציה

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

פונקציה מדידה אל $\mathbb{R}$.

הוכחה: נניח כי האינדיקטור מדיד. נשים לב שמתקיים

$$\mathcal{B}(X) \ni (1_A)^{-1}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = A$$

כעת נניח כי A מדידה. לפי ההערה הקודמת, מספיק לבדוק שמתקיים $(1_A)^{-1}(I) \in \mathcal{B}(X)$ לכל I קטע פתוח. נשים לב כי

$$(1_A)^{-1}(I) = \begin{cases} A & 1 \in I, 0 \notin I \\ A^c & 1 \notin I, 0 \in I \\ X & 0, 1 \in I \\ \emptyset & 0, 1 \notin I \end{cases}$$

כל הקבוצות הללו מדידות, ולכן 1_A מדידה. ∎

תרגיל תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית. הראו כי f מדידה בורל.

פתרון בלי הגבלת הכלליות, f עולה (אחרת מכפילים פי 1־, שלא משנה כלום). כמו קודם, מספיק לבדוק שלכל I קטע מתקיים $f^{-1}(I) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. נקבע $I = [a,b]$ ונראה כי $f^{-1}(I)$ קטע. נגדיר

$$\begin{aligned} x_a &= \inf\{x \mid f(x) \geq a\} \\ x_b &= \sup\{x \mid f(x) \leq b\} \end{aligned}$$

נראה שמתקיים

$$(x_a, x_b) \subseteq f^{-1}([a,b]) \subseteq [x_a, x_b]$$

יהי $y \in (x_a, x_b)$. נראה כי $a \leq f(y) \leq b$. אם $f(y) < a$, כמובן מתקיים $y \notin \{x \mid f(x) > a\}$ ולכן $y \leq \inf\{x \mid x > a\}$, אבל $y > x_a$ בסתירה להגדרת x_a כאינפימום. אם $f(y) > b$ ההוכחה דומה.
כעת, יהי $y \in f^{-1}([a,b])$. נראה כי $x_a \leq y \leq x_b$. מתקיים בהכרח $a \leq f(y) \leq b$, ולכן מההגדרה $x_a \leq y \leq x_b$. לכן בסך הכל סיימנו.
פתרון אלטרנטיבי: למדנו בחדו"א שפונקציה מונוטונית אזי f רציפה בכל מקום פרט לכמות בת מניה של נקודות. נסמן את קבוצת נקודות האי־רציפות D. כעת, בבירור D מדידה, ולכן אם נראה שגם $f|_D$ מדידה וגם $f|_{D^c}$ מדידה, נסיים. $f|_{D^c}$ רציפה, ובפרט מדידה. עבור $f|_D$, לכל I מדידה, $(f|_D)^{-1}(I) \subseteq D$, אבל כל תת קבוצה של קבוצה בת מניה היא בת מניה, ולכן מדידה.

תזכורת בהרצאה ראינו את הטענה הבאה: יהיו $(X, \mathcal{B}(X)), (Y, \mathcal{B}(Y))$ ספרביליים, אזי $\mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)$.
התנאי על ספרביליות הוא הכרחי. נדגים זאת

דוגמא תהי X עבורה $|X| > \aleph$. תהי d מטריקה על X, ונסמן בתור $\mathcal{B}(X)$ את הסיגמא אלגברה של בורל. נראה שמתקיים

$$\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \notin \mathcal{B}(X) \times \mathcal{B}(X)$$

נסמן

$$E = \{A \times B \mid A, B \in \mathcal{B}(X)\}$$

נגדיר את $\mathcal{E}_0$ להיות קבוצת כל הקבוצות שהן איחוד של לכל היותר $\aleph$ קבוצות מתוך E, וגם המשלים שלהן כזה.
תרגיל ־ $\mathcal{E}_0$ מכילה את E וסגורה לאיחודים וחיתוכים בני מניה, וממשפט המחלקה המונוטונית מכילה את $\sigma(E)$.
נראה שלא ייתכן $\Delta \in \mathcal{E}_0$. נניח בשלילה שמתקיים $\Delta \in \mathcal{E}_0$, אז

$$\Delta = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \times B_\alpha$$

כאשר $\aleph \le |I|$. ברור שלכל α חייב להתקיים

$$A_\alpha = B_\alpha = \{x_\alpha\}$$

ולכן למעשה

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} \{x_\alpha\}$$

ולכן $\aleph \le |X|$, בסתירה.