פונקציות ממשיות

ⓒ ארזים

8 בנובמבר 2016

1 סיגמא אלגבראות

הגדרה 1.1 יהי X מרחב (טופולוגי מטרי), ותהי $\mathcal{F} \subseteq 2^X$. $\mathcal{F}$ תקרא אלגברה אם מתקיימים הבאים:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

הגדרה 1.2 אם תכונה 3 מקודם מוחלפת בתכונה

$$\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

אזי $\mathcal{F}$ נקראת σ־אלגברה.

הערה 1.3 אם X סופי, אזי כל אלגברה היא σ־אלגברה.

דוגמא

1. לכל מרחב X, 2^X היא σ־אלגברה.
2. לכל מרחב X, $\mathcal{F} = \{0, X\}$ היא σ־אלגברה.
3. $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$. נוכיח:
   (א) $\emptyset \in \mathcal{F}$
   (ב) תהי $A \in \mathcal{F}$. אם $A \in \{\emptyset, X\}$, ברור שגם $A^c \in \mathcal{F}$. אם $A = \{1\}$ אזי $A^c = \{2, 3\} \in \mathcal{F}$, ולהיפך.
   (ג) יהיו $A, B \in \mathcal{F}$. אם $A = \emptyset$ אם $B = \emptyset$ או $A = B$ אזי ברור כי $A \cup B \in \mathcal{F}$. אחרת, $A \cup B = X \in \mathcal{F}$.

   בסך הכל הוכחנו שזו אלגברה, אבל X סופית, ולכן זו σ־אלגברה.
4. $X = \mathbb{R}$ (או כל X אינסופי), $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid |A| < \infty \vee |A^c| < \infty\}$. ברור שמתקיים $\emptyset \in \mathcal{F}$, וכן שאם $A \in \mathcal{F}$ אז גם $A^c \in \mathcal{F}$. תהיינה $A, B \in \mathcal{F}$. נחלק למקרים:

(א) $|A|,|B|<\infty$: $|A\cup B|\leq|A|+|B|<\infty$, לכן $A\cup B\in\mathcal{F}$.
(ב) אם אחת מהן אינסופית, בלי הגבלת הכלליות זו A. נשים לב כי

$$|(A\cup B)^{c}|=|A^{c}\cap B^{c}|\leq|A^{c}|<\infty$$

כאשר האי שוויון האחרון נובע מכך שמתקיים $A\in\mathcal{F}$ וגם A אינסופית.

קיבלנו כי $\mathcal{F}$ היא אלגברה, אבל היא אינה σ־אלגברה ־ למשל נסמן $A_n=\{-n,n\}$, ונקבל

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\mathbb{Z}\notin\mathcal{F}$$

תרגיל יהיו X,Y מרחבים, $g:X\to Y$. תהי $\mathcal{F}_y\subseteq 2^{Y}$ σ־אלגברה. הראו כי $\mathcal{F}_x=\left\{g^{-1}(A)\mid A\in\mathcal{F}_y\right\}$ גם היא σ־אלגברה.

פתרון נראה את התכונות:

1. $\emptyset\in\mathcal{F}_x\iff\emptyset\in\mathcal{F}_y$, אבל $\mathcal{F}_y$ σ־אלגברה, ולכן זה מתקיים.
2. נניח כי $A\in\mathcal{F}_x$. אזי קיימת $B\in\mathcal{F}(x)$ עבורה $g^{-1}(B)=A$. נזכור שמתקיים $A^{c}=\left(g^{-1}(B)\right)^{c}=g^{-1}(B^{c})$, וכעת $B^{c}\in\mathcal{F}_y$, שכן $\mathcal{F}_y$ σ־אלגברה, ולכן גם $A^{c}\in\mathcal{F}_x$.
3. תהיינה $\{A_n\}\subseteq\mathcal{F}_x$. אזי לכל n קיימת $B_n\in\mathcal{F}_y$ עבורה $A_n=g^{-1}(B_n)$, ועתה

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}g^{-1}(B_n)=g^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)$$

האיחוד הזה הוא איבר של $\mathcal{F}_y$, ולכן האיחוד של $\{A_n\}$ הוא איבר של $\mathcal{F}_x$.

תרגיל תהיינה $\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ σ־אלגבראות. אז $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ היא σ־אלגברה.

פתרון

1. $\emptyset\in\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$, ולכן $\emptyset\in\mathcal{F}$.
2. אם $A\in\mathcal{F}$ אזי $A\in\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$, ולכן $A^{c}\in\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$, כלומר $A^{c}\in\mathcal{F}$.
3. אם $\{A_n\}\subseteq\mathcal{F}$, אזי $\{A_n\}\subseteq\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$, כלומר $\bigcup A_n\in\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$, ולכן $\bigcup A_n\in\mathcal{F}$.

שאלה למחשבה ־ מה לגבי איחוד?

הגדרה 1.4 יהי X מרחב, ותהי $A\subseteq 2^{X}$. נגדיר

$$\sigma(A)=A^{*}$$

להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי A, שהיא חיתוך כל הסיגמא אלגבראות של X שמכילות את A.

דוגמאות תהי $A=\{[1,2],[0,1]\}$.

1. $X=[0,2]$:

$$\sigma(A)=\{\emptyset,X,[0,1],(1,2],[1,2],[0,1),\{1\},X\setminus\{1\}\}$$

2. $X=\mathbb{R}$: להשלים כתרגיל, יוצא המון קבוצות.

תרגיל נסמן

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &= \{[a,b]\mid -\infty<a<b<\infty\}\\ \mathcal{A} &= \mathcal{A}_0\cup\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\mid\{A_n\}\subseteq\mathcal{A}_0\right\}\cup\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\mid\{A_n\}\subseteq\mathcal{A}_0\right\}\end{aligned}$$

הראו כי $\mathcal{A}_0$ σ־אלגברה.

פתרון נראה את התכונות.

1. $I_1=[0,1]\in\mathcal{A}_0, I_2=[2,3]\in\mathcal{A}_0$, ואז $\emptyset=I_1\cap I_2\in\mathcal{A}$.
2. ראשית נשים לב כי $(a,b)\in\mathcal{A}$:

$$(a,b)=\bigcup_{i=1}^{n}\left[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}\right]$$

כעת, תהי $A\in\mathcal{A}$. אם $A=[a,b]$, אזי

$$[a,b]^c=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left([a-n-1,b-n]\cup[b+n,b+n+1]\right)\cup(a-1,a)\cup(b,b+1)\in\mathcal{A}$$

אם A היא איחוד בן מניה של קטעים סגורים, נכתוב

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$$

ואז מקבלים

$$A^c=\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]^c\in\mathcal{A}$$

המקרה השלישי, בוא A היא חיתוך בן מניה של קטעים סגורים, הוא דומה, ונשאיר אותו כתרגיל.

3. ברור מההגדרה כי $\mathcal{A}$ סגורה לאיחודים בני מנייה.

דרך נוספת להוכיח את העניין היא להשתמש בשפט ההחלקה המונוטונית.