<u>פונקציות ממשיות</u>

ⓒ ארזים

2 בנובמבר 2016

1 תזכורות

1.1 סדרות של פונקציות

הגדרה 1.1 בהינתן סדרת פונקציות $\{f_n\}$נאמר שהן <u>מתכנסות נקודתית</u> לפונקציה f, ונסמן $f_n \xrightarrow{p} f$, אם לכל $x \in X$ מתקיים $f_n(x) \to f(x)$.

הגדרה 1.2 בהינתן סדרת פונקציות $\{f_n\}$ נאמר שהן <u>מתכנסות במידה שווה</u> לפונקציה f, ונסמן $f_n \xrightarrow{u} f$, אם

$$\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

משפט 1.3 אם $f_n \xrightarrow{u} f$ וכן $f_n \in C(X)$ אזי $f \in C(X)$.

1.2 מרחבים מטריים

הגדרה 1.4 <u>מטריקה</u> היא פונקציה $d : X \times X \to \mathbb{R}$ שמקיימת:

1. אי שליליות.
2. יחידות ($d(x,y) = 0 \iff x = y$).
3. סימטריה.
4. אי שוויון המשולש.

דוגמאות

1. מטריקה אוקלידית: $X = \mathbb{R}^n$,

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$$

2. מטריקה דיסקרטית: X קבוצה,

$$d\left(x,y\right)=\begin{cases}1 & x\neq y\\0 & x=y\end{cases}$$

3. מטריקת cut-off: בהינתן מטריקה d:

$$\rho\left(x,y\right)=\min\left\{d\left(x,y\right),1\right\}$$

חשבו מדוע זה לא משנה את הטופולוגיה.

1.3 רציפות

הגדרה 1.5 יהיו $\left(X,d\right),\left(Y,\rho\right)$ שני מרחבים מטריים, ותהי $f:\left(X,d\right)\to\left(Y,\rho\right)$. נאמר שהפונקציה f רציפה בנקודה $x_0\in X$ אם לכל סדרה $x_n\to x_0$ מתקיים

$$f\left(x_n\right)\to f\left(x_0\right)$$

נאמר שהפונקציה f רציפה אם היא רציפה בכל נקודה $x_0\in X$.

משפט 1.6 התנאים הבאים שקולים:

1. לכל $x_n\to x$ מתקיים $f\left(x_n\right)\to f\left(x\right)$.
2. לכל $x\in X$ ולכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שמתקיים

$$d\left(x,y\right)\leq\delta\Rightarrow\rho\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq\varepsilon$$

3. לכל קבוצה פתוחה $U\subseteq Y$, הקבוצה $f^{-1}\left(U\right)\subseteq X$ פתוחה.
4. לכל קבוצה סגורה $F\subseteq Y$, הקבוצה $f^{-1}\left(F\right)\subseteq X$ סגורה.

הוכחה: נוכיח רק $3\Rightarrow 2$ (למעשה נוכיח $3\Rightarrow 1$, אבל פשוט להראות שקילות בין $1,2$ כמו בחדו"א 1).

תהי U קבוצה פתוחה ונניח בשלילה כי $f^{-1}\left(U\right)$ אינה פתוחה. לכן קיימת $x_0\in f^{-1}\left(U\right)$ כך שלכל $n>1$ מתקיים

$$B_d\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\cap\left(f^{-1}\left(U\right)\right)^C$$

לכל n נבחר x_n בחיתוך הזה. בפרט מתקיים $d\left(x_0,x_n\right)<\frac{1}{n}$, ולכן $x_n\to x_0$. לכן מתקיים $f\left(x_n\right)\to f\left(x_0\right)$. משום שהקבוצה U פתוחה קיים $\varepsilon>0$ המקיים

$$B_\rho\left(f\left(x_0\right),\varepsilon\right)\subseteq U$$

בפרט, לכל n גדול מספיק, מתקיים

$$f\left(x_{n}\right)\in B_{\rho}\left(f\left(x_{0}\right),\varepsilon\right)\subseteq U$$

ולכן

$$x_{n}\in f^{-1}\left(U\right)\cap\left(f^{-1}\left(U\right)\right)^{C}=\emptyset$$

בסתירה. $\blacksquare$

למה 1.7 יהי $c>0$, X מרחב מטרי, $M\subseteq X$ קבוצה סגורה, $h:M\to\left[-c,c\right]$ רציפה. קיימת $g:X\to\left[-\frac{c}{3},\frac{c}{3}\right]$ רציפה, וכן לכל $x\in M$, מתקיים

$$\left|g\left(x\right)-h\left(x\right)\right|\leq\frac{2}{3}c$$

הוכחה: נסמן

$$A=h^{-1}\left[-c,-\frac{c}{3}\right],B=h^{-1}\left[\frac{c}{3},c\right]$$

A,B סגורות, שכן h רציפה, ולכן מתנאי 4 מהמשפט הקודם הן סגורות. נגדיר

$$\varphi\left(x\right)=\frac{d\left(x,A\right)}{d\left(x,A\right)+d\left(x,B\right)}$$

כעת נגדיר גם

$$g\left(x\right)=\frac{2}{3}c\cdot\left(\varphi\left(x\right)-\frac{1}{2}\right)$$

בשיעורי הבית נראה כי φ רציפה. לכן גם g רציפה. כמו כן, $0\leq\varphi\leq1$ בבירור, ולכן

$$g\left(x\right):X\to\left[-\frac{c}{3},\frac{c}{3}\right]$$

נראה כי לכל $x\in M$ מתקיים

$$\left|h\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\leq\frac{2}{3}c$$

נניח כי $x \in A$. במקרה זה מתקיים $\varphi(x) = 0$, ולכן $g(x) = -\frac{c}{3}$. מצד שני, $x \in A$, ולכן

$$-c \le h(x) \le -\frac{c}{3}$$

לכן בסך הכל נקבל כי

$$|g(x) - h(x)| \le \frac{2}{3}c$$

אם $x \notin A$ נניח כי $x \in B$. באופן דומה, $\varphi(x) = 1$, ולכן $g(x) = \frac{c}{3}$. מצד שני, $x \in B$, ולכן

$$\frac{c}{3} \le h(x) \le c$$

בסך הכל נקבל

$$|g(x) - h(x)| \le \frac{2}{3}c$$

במקרה השלישי, $x \notin B, x \notin A$. לכן מתקיים $|h(x)| \le \frac{c}{3}$. לכן

$$|h(x) - g(x)| \le |h(x)| + |g(x)| \le \frac{2}{3}c$$

■

משפט 1.8 (משפט Tietze) יהי (X,d) מרחב מטרי, ותהי $M \subseteq X$ קבוצה סגורה. לכל $f : M \to [0,1]$ רציפה קיימת הרחבה רציפה השומרת על החסמים. במילים אחרות: קיימת $g : X \to [0,1]$ רציפה המקיימת

$$g|_M = f$$

הוכחה: נגדיר סדרת פונקציות: $h_1 = f$, $c_1 = 1$. מהלמה קיימת $g_1 : X \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ רציפה המקיימת

$$\max_M |f - g_1| \le \frac{2}{3}$$

כעת, $h_2 = f - g_1$, $c_2 = \frac{2}{3}$. מהלמה קיימת $g_2 : X \to \left[-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right]$ המקיימת

$$\max_M |f - g_1 - g_2| \le \frac{4}{9}$$

בשלב הכללי, נסמן

$$h_n = f - \sum_{k=1}^{n-1} g_k$$

וזו רציפה, המקיימת $\mathrm{Im}\left(h_n\right) \subseteq \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$. נבחר $c_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, ונקבל מהלמה g_n רציפה המקיימת

$$\max_M \left|h_n - g_n\right| < \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

כעת נסמן

$$g\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} g_n\left(x\right)$$

נראה כי יש כאן התכנסות במידה שווה לפי קריטריון קושי:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} g_k\left(x\right) - \sum_{k=1}^{m} g_k\left(x\right)\right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \left|g_k\left(x\right)\right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \xrightarrow{m\to\infty} 0$$

כעת נראה כי

$$\max_m \left|f\left(x\right) - g\left(x\right)\right| = 0$$

זאת משום שמתקיים לכל n:

$$\max_M \left|f - g\right| \leq \max_M \left|f - \sum_{=1}^{n} g_k\right| + \max_M \left|\sum_{k=1}^{n} g_k - g\right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

■