<u>פונקציות ממשיות</u>

© ארזים

1 בינואר 2017

1 התכנסות פונקציות

1.1 התכנסות כמעט במידה שווה

הגדרה 1.1 יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה ויהיו $f,f_1,f_2,\cdots:X\to\mathbb{C}$ פונקציות מדידות. אומרים כי $f_n\to f$ כמעט במידה שווה (almost uniformly, a.u.) אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $A=A(\varepsilon)\in\Sigma$ עבורה:

$$\mu(A)<\varepsilon$$
$$f_n\mid_{A^c}\xrightarrow{u}f_n\mid_{A^c}$$

הערה 1.2 אם $f_n\to f$ כמעט במידה שווה אזי $f_n\to f$ כמעט בכל מקום.

הוכחה: אכן, לכל i קיימת $A_i\in\Sigma$ עם $\mu(A_i)<\frac{1}{i}$ וכך שמתקיים $f_n\mid_{A_i^c}\to f\mid_{A_i^c}$ במידה שווה, ובפרט נקודתית. נסמן

$$N=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$$

אזי $N\in\Sigma$, $\mu(N)=0$, ואם $x\notin N$ יש i עבורו $x\notin A_i$ כלומר $x\in A_i^c$, ולכן $f_n(x)\to f(x)$. ■

משפט 1.3 (אגורוב) יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה <u>סופי</u>. יהיו $f,f_1,f_2,\cdots:X\to\mathbb{C}$ פונקציות מדידות, כך שמתקיים $f_n\to f$ כמעט בכל מקום. אזי $f_n\to f$ כמט במידה שווה.

הוכחה: על ידי שינוי בקבוצה מדידה וזניחה אפשר להניח $f_n\to f$ נקודתית.
יהי $\varepsilon>0$. לכל זוג מספרים טבעיים k,N נסמן

$$E_{N,k}=\left\{x\in X\mid\forall m\geq N\quad|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}\right\}$$

אזי $E_{N,k}$ מדידות, $E_{1,k} \subseteq E_{2,k} \subseteq \dots$ וכן לכל k קבוע מתקיים

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} E_{N,k} = X$$

וזאת שכן

$$E_{1,k}^{c} \supseteq E_{2,k}^{c} \supseteq \dots$$

וכן

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} E_{N,k}^{c} = \emptyset$$

מאחר ונתון שהמידה μ סופית, מתקיים

$$\lim_{N\to\infty} \mu\left(E_{N,k}^{c}\right) = \mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} E_{N,k}^{c}\right) = \mu\left(\emptyset\right) = 0$$

לכן קיים N_k עבורו

$$\mu\left(E_{N_k,k}^{c}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

ולבסוף נסמן

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{N_k,k}^{c}$$

A מדידה וכן $\mu\left(A\right) < \varepsilon$. נבדוק שמתקיים $f_n \mid_{A^c} \to f \mid_{A^c}$ במידה שווה.
יהי k טבעי. לכל $x \in A^c$ מתקיים

$$x \in E_{N_k,k}$$

לכן, לכל $n \geq N_k$, מתקיים

$$\left|f_n\left(x\right) - f\left(x\right)\right| < \frac{1}{k}$$

■

1.2 התכנסות במידה

הגדרה 1.4 יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה ותהיינה $f,f_1,f_2,\dots:X\to\mathbb{C}$ פונקציות מדידות. אומרים כי $f_n\to f$ במידה אם לכל $\varepsilon>0$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(\{x\in X\mid |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\right)=0$$

הערה 1.5 אם $f_n\to f$ במידה אז לכל תת סדרה $f_{n_j}\to f$ במידה.

הערה 1.6 אם $f_n\to f$ במידה וגם $f_n\to f'$ במידה, אזי $f=f'$ כמעט בכל מקום (יחידות הגבול).

הוכחה:

$$\mu\left(|f-f'|\geq 2\varepsilon\right)\leq\mu\left(|f_n-f|\geq\varepsilon\right)+\mu\left(|f_n-f'|\geq\varepsilon\right)\to 0$$

לכן $\mu\left(|f-f'|\geq 2\varepsilon\right)=0$ לכל $\varepsilon>0$, ולכן $f=f'$ כמעט בכל מקום. ■

הערה 1.7 אם $f_n\to f$ כמעט במידה שווה אזי $f_n\to f$ במידה.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. נרצה להראות כי לכל $\delta>0$ קיים N עבורו לכל $n\geq N$ מתקיים

$$\mu\left(|f_n-f|\geq\varepsilon\right)<\delta$$

יש A מדידה עם $\mu(A)<\delta$ וכך שמתקיים

$$f_n\mid_{A^c}\xrightarrow{u}f\mid_{A^c}$$

לכן יש N כך שלכל $n\geq N$ מתקיים

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

לכל $x\in A^c$. לכן עבור $n\geq N$ מתקיים

$$\{x\mid |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}\subseteq A$$

ולכן

$$\mu\left(|f_n-f|\geq\varepsilon\right)<\delta$$

■

הגדרה 1.8 סדרת פונקציות מדידות $f_n : X \to \mathbb{C}$ נקראת <u>סדרת קושי במידה</u> אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\lim_{n,m\to\infty} \mu\left(\{x\in X \mid |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

הערה 1.9 אם $f_n \to f$ במידה אזי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי במידה.

הוכחה: לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$\mu\left(|f_n - f_m| \geq 2\varepsilon\right) \leq \mu\left(|f_n - f| \geq \varepsilon\right) + \mu\left(|f_m - f| \geq \varepsilon\right) \to 0$$

■

הערה 1.10 אם $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי במידה, וקיימת תת סדרה $\left\{f_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ ופונקציה f מדידה כך שמתקיים $f_{n_j} \to f$ במידה, אזי $f_n \to f$ במידה.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$, ויהי $\delta > 0$ כלשהו. קיים N כך שעבור $m, n \geq N$ מתקיים

$$\mu\left(\left\{|f_n - f_m| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\delta}{2}$$

קיים j עבורו $n_j \geq N$, וכן

$$\mu\left(\left\{\left|f_{n_j} - f\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) < \frac{\delta}{2}$$

לבסוף, עבור כל $n \geq N$ נקבל בעזרת ההצבה $m = n_j$ באי שוויון הראשון:

$$\mu\left(|f_n - f| \geq \varepsilon\right) \leq \mu\left(\left|f_n - f_{n_j}\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mu\left(\left|f_{n_j} - f\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) < \delta$$

■

תאור נוסף: עבור $f, g : X \to \mathbb{C}$ מדידות נסמן

$$\delta(f,g) = \inf_{\varepsilon>0}\left\{\varepsilon + \mu\left(|f-g|\right) \geq \varepsilon\right\} \in [0,\infty]$$

זו לא בדיוק מטריקה אבל זה די קרוב (יכול להיות אינסוף, יכול להיות 0 אם שתי פונקציות שוות כמעט בכל מקום. מבעיה השנייה אפשר להיפטר על ידי מחלקות שקילות, ומהראשונה נפטרים לעיתים על ידי לקיחת $\arctan$ של הכל).

משפט 1.11 יהי (X, Σ, μ) מרחב מידה ותהי $\{f_n\} : X \to \mathbb{C}$ סדרת קושי במידה של פונקציות מדידות. אזי קיימת פונקציה מדידה $f : X \to \mathbb{C}$ וקיימת תת סדרה $\left\{f_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $f_{n_j} \to f$ כמעט במידה שווה.

הוכחה: לכל j קיים $n_j \geq 1$ כך שעבור $m,n \geq n_j$ מתקיים

$$\mu\left(|f_m - f_n| \geq \frac{1}{2^j}\right) < \frac{1}{2^j}$$

אפשר להניח $1 < n_1 < n_2 < \dots$. בפרט ניקח $m = n_j$ ונקבל שלכל $n \geq n_j$ מתקיים

$$\mu\left(\left|f_n - f_{n_j}\right| \geq \frac{1}{2^j}\right) < \frac{1}{2^j}$$

נסמן

$$E_j = \left\{x \in X \mid \left|f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\right| \geq \frac{1}{2^j}\right\}$$

נובע כי לכל j מתקיים

$$\mu(E_j) < \frac{1}{2^j}$$

כעת נסמן

$$F_l = \bigcup_{j=l}^{\infty} E_j$$

ואז נקבל

$$\mu(F_l) < \frac{1}{2^{l-1}}$$

כעת, אם $x \in F_l^c$ אזי $x \in E_j^c$ לכל $j \geq l$. מכאן נקבל כי אם $x \in F_l^c$אזי

$$\left|f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\right| < \frac{1}{2^j}$$

ולכן נקבל גם שאם $x \in F_l^c$ אזי לכל $i \geq j \geq l$ מתקיים

$$\left|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)\right| < \frac{1}{2^{j-1}} \tag{1}$$

בפרט, לכל l ולכל $x \in F_l^c$, הסדרה $\left\{f_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי. כמו כן, $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots$. נסמן

$$F = \bigcap_{l=1}^{\infty} F_l$$

אזי $\mu(F)=0$. בנוסף, לכל $x\in F^c$ $\left\{f_{n_j}(x)\right\}_{j=1}^{n}$ היא סדרת קושי לכל $x \in F^c$. בנוסף, F מדידה.
נגדיר

$$f(x)=\begin{cases}\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(x) & x\in F^c\\ 0 & x\in F\end{cases}$$

אזי f מדידה. לבסוף, נשאיף $i\to\infty$ בי שוויון (1) ונקבל

$$\left|f(x)-f_{n_j}(x)\right|<\frac{1}{2^{j-1}}$$

כאשר $j\geq l$, $x\in F_l^c$. מכאן נקבל כי $f_{n_j}|_{F_l^c}\to f|_{F_l^c}$ במידה שווה. מאחר ומתקיים $\mu(F_l)<\frac{1}{2^{l-1}}$, נובע כי $f_{n_j}\to f$ כמעט במידה שווה. ■

הערה 1.12 בפרט נובע כי $f_{n_j}\to f$ כמעט בכל מקום ונובע כי $f_n\to f$ במידה (שכן $f_{n_j}\to f$ במידה, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי במידה).

משפט 1.13 יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה, ויהיו $f,f_1,f_2,\cdots:X\to\mathbb{C}$ פונקציות מדידות. אם $f_n\to f$ במידה אזי קיימת תת סדרה $\left\{f_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $f_{n_j}\to f$ כמעט במידה שווה, ובפרט נקודתית.

הוכחה: ראינו כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי במידה. לפי המשפט הקודם, קיימת פונקציה מדידה $f':X\to\mathbb{C}$ ותת סדרה $\left\{f_{n_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $f_{n_j}\to f'$ כמעט במידה שווה, ובפרט במידה. אבל $f_{n_j}\to f$ במידה, שכן $f_n\to f$ במידה, ולכן $f=f'$ כמעט בכל מקום. לכן נובע כי $f_{n_j}\to f$ כמעט במידה שווה. ■

2 מכפלת מידות

2.1 מכפלת סיגמא אלגברות

יהיו (X,Σ_x), (Y,Σ_y) שני מרחבים מדידים. אם $E\subseteq X,F\subseteq Y$ אזי $E\times F\subseteq X\times Y$ נקרא <u>מלבן</u>. אם $E\in\Sigma_x,F\in\Sigma_y$ נקרא <u>מלבן מדיד</u>.

הערה 2.1 אוסף האיחודים הזרים בזוגות הסופיים של מלבנים מדידים הוא אלגברה (ולכן שווה גם לאוסף האיחודים הסופיים של מלבנים מדידים).

הוכחה: נסמן אוסף זה בתור $\mathcal{A}$. בבירור $\emptyset\in\mathcal{A}$.
סגירות לחיתוך: ניקח

$$E=\bigcup_{i=1}^{n}R_i,F=\bigcup_{j=1}^{m}R_j^{'}$$

איחודים זרים בזוגות וסופיים של מלבנים מדידים. אזי

$$E\cap F=\bigcup_{i,j=1}^{n,m}\left(R_i\cap R_j^{'}\right)$$

וכל $R_i\cap R_j^{'}$ מלבן מדיד.

נותר להראות כי $\mathcal{A}$ סגורה ביחס למשלים. מאחר וראינו כי $\mathcal{A}$ סגורה לחיתוכים סופיים, די להראות שאם $R=E\times F$ מלבן מדיד, אזי R^c הוא איחוד זר של מלבנים מדידים. אבל מתקיים

$$\left(E\times F\right)^c=\left(E^c\times Y\right)\cup\left(E\times F^c\right)\in\mathcal{A}$$

■

הגדרה 2.2 יהיו (X,Σ_x), (Y,Σ_y) שני מרחבים מדידים. אזי $\Sigma_x\otimes\Sigma_y$ היא הסיגמא אלגברה על $X\times Y$ הנוצרת על ידי אוסף כל המלבנים המדידים (זוהי גם הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי האלגברה $\mathcal{A}$ שראינו לפני רגע).

הגדרה 2.3 אם $E\subseteq X\times Y$, $x\in X$, $y\in Y$, נסמן את החתכים הבאים:

$$E_x=\{y\in Y\mid (x,y)\in E\}\subseteq Y$$
$$E^y=\{x\in X\mid (x,y)\in E\}\subseteq X$$

טענה 2.4 אם $E\in\Sigma_x\otimes\Sigma_y$, אזי לכל $x\in X,y\in Y$ מתקיים

$$E_x\in\Sigma_y,E^y\in\Sigma_x$$

הוכחה: תהי Ω המחלקה המונוטונית של כל תתי הקבוצות $E\subseteq X\times Y$ כך שלכל $x\in X$ מתקיים $E_x\in\Sigma_y$. אזי $\emptyset\in\Omega$, וכמו כן,

$$\left(E^c\right)_x=\left(E_x\right)^c$$

ואפילו

$$\left(\bigcup_i E\right)_x=\bigcup_i\left(E_i\right)_x$$

וכך נקבל כי Ω סיגמא אלגברה. ברור שכל מלבן מדיד שייך לקבוצה Ω, ולכן נקבל כי $\Sigma_x\otimes\Sigma_y\subseteq\Omega$. לכן אם $E\in\Sigma_x\otimes\Sigma_y$, אזי $E\in\Omega$, ואז

$$E_x\in\Sigma_y$$

לכל $x\in X$. החלק השני דומה. ■

מסקנה 2.5 יהיו $A \subseteq X, B \subseteq Y$ כך שמתקיים

$$\emptyset \neq A \times B \in \Sigma_x \otimes \Sigma_y$$

אזי $B \in \Sigma_y$, $A \in \Sigma_x$.

הוכחה: יהי $(x_0, y_0) \in A \times B$. אזי

$$B = (A \times B)_{x_0} \in \Sigma_y$$
$$A = (A \times B)_{y_0} \in \Sigma_x$$

■

טענה 2.6 יהיו (X, Σ_x), (Y, Σ_y) מרחבים מדידים.יהיו $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$. אזי

$$(\Sigma_x \mid_{X_1}) \otimes (\Sigma_y \mid_{Y_1}) = (\Sigma_x \otimes \Sigma_y) \mid_{X_1 \times Y_1}$$

הוכחה: נסמן בתור $\mathrm{Rect}(\Sigma_x, \Sigma_y)$ את אוסף המלבנים המדידים. אזי $\Sigma_x \otimes \Sigma_y$ היא הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי $\mathrm{Rect}(\Sigma_x, \Sigma_y)$. לכן $(\Sigma_x \otimes \Sigma_y) \mid_{X_1 \times Y_1}$ היא הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי $\mathrm{Rect}(\Sigma_x, \Sigma_y) \mid_{X_1 \times Y_1}$. אבל מתקיים

$$\mathrm{Rect}(\Sigma_x, \Sigma_y) \mid_{X_1 \times Y_1} = \mathrm{Rect}(\Sigma_x \mid_{X_1}, \Sigma_y \mid_{Y_1})$$

והסגימא אלגברה שנוצרת על ידי אגף ימין היא בדיוק $(\Sigma_x \mid_{X_1}) \otimes (\Sigma_y \mid_{Y_1})$. ■

תזכורת תהי $\mathcal{A}$ אלגברה על קבוצה X ותהי Σ הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי $\mathcal{A}$. תהיינה μ, μ' שתי מידות על (X, Σ) כך שמתקיים:

1. $\mu \mid_{\mathcal{A}} = \mu' \mid_{\mathcal{A}}$.
2. קיים איחוד

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

עם $A_n \in \mathcal{A}$ וכן $\mu(A_n) < \infty$ לכל n.

אזי $\mu = \mu'$.

פתרון נוכל להניח כי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ הן זרות בזוגות. נסמן בתור $\mathcal{C}$ את אוסף האיברים $E \in \Sigma$ עבורם לכל n מתקיים

$$\mu(E \cap A_n) = \mu'(E \cap A_n)$$

אזי $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ (כי אם $E \in \mathcal{A}$ אזי $E \cap A_n \in \mathcal{A}$ לכל n). נראה כי $\mathcal{C}$ היא מחלקה

מונוטונית, ומכאן נקבל שהיא סיגמא אלגברה (כי $\mathcal{A}$ אלגברה - ממשפט המחלקה המונוטונית). לכן $\mathcal{C} = \Sigma$, ומכאן לכל $E \in \Sigma$ מתקיים

$$\mu\left(E\right) = \mu\left(\bigcup_{n}\left(E \cap A_n\right)\right) = \sum_{n}\mu\left(E \cap A_n\right) = \sum_{n}\mu'\left(E \cap A_n\right) = \mu'\left(E\right)$$

ולכן נסיים.

לכן די להוכיח כי $\mathcal{C}$ מחלקה מונוטונית.

אם $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ מתוך $\mathcal{C}$, אזי נסמן

$$E = \bigcup_{i} E_i$$

ונקבל

$$\mu\left(E \cap A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{i}\left(E_i \cap A_n\right)\right) = \lim_{i \to \infty}\mu\left(E_i \cap A_n\right) = \lim_{i \to \infty}\mu'\left(E_i \cap A_n\right) = \mu'\left(E \cap A_n\right)$$

כעת נראה כי $E \in \mathcal{C}$ אם ורק אם $E^c \in \mathcal{C}$. די להוכיח כיוון אחד. נניח כי $E \in \mathcal{C}$, אזי

$$\mu\left(E^c \cap A_n\right) = \mu\left(A_n \backslash \left(E \cap A_n\right)\right) = \mu\left(A_n\right) - \mu\left(E \cap A_n\right) = \mu'\left(A_n\right) - \mu'\left(E \cap A_n\right) = \mu'\left(E^c \cap A_n\right)$$

כעת, נניח כי $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ איברים של $\mathcal{C}$, ונסמן

$$E = \bigcap_{i} E_i$$

נרצה להראות כי $E \in \mathcal{C}$. מתקיים $E_1^c \subseteq E_2^c \subseteq \ldots$, ולכן

$$\bigcup_{i} E_i^c \in \mathcal{C}$$

ולכן גם המשלים שלו:

$$\left(\bigcup_{i} E_i^c\right)^c = \bigcap_{i} E_i \in \mathcal{C}$$

ולכן $\mathcal{C}$ היא מחלקה מונוטונית, וסיימנו.

2.2 מכפלת מידות

טענה 2.7 יהיו (X, Σ_x, μ), (Y, Σ_y, λ) מרחבי מידה סיגמא סופיים. אזי קיימת לכל היותר מידה אחת $\mu \otimes \lambda$ על המרחב המדיד $(X \times Y, \Sigma_x \otimes \Sigma_y)$ כך שלכל מלבן מדיד $A \times B$ מתקיים

$$\left(\mu \otimes \lambda\right)\left(A \times B\right) = \mu\left(A\right)\lambda\left(B\right)$$

הוכחה: תהי $(\mu\otimes\lambda)'$ מידה נוספת על $(X\times Y,\Sigma_x\otimes\Sigma_y)$, כך שהתכונה מתקיימת עבורה. נשתמש באלגברה $\mathcal{A}=\mathcal{A}(\Sigma_x,\Sigma_y)$ הנוצרת מהמלבנים המדידים. היא מורכבת מאיחודים סופיים וזרים של מלבנים מדידים. אזי

$$(\mu\otimes\lambda)\mid_{\mathcal{A}}=(\mu\otimes\lambda)'\mid_{\mathcal{A}}$$

כמו כן, קיימים פירוקים זרים

$$X=\bigcup_{i=1}^{\infty}X_i$$
$$Y=\bigcup_{j=1}^{\infty}Y_j$$

כך שלכל i,j מתקיים $\mu(X_i),\mu(Y_j)<\infty$. אזי

$$X_i\times Y_j\in\mathcal{A}$$
$$X\times Y=\bigcup_{i,j=1}^{\infty}X_i\times Y_j$$

וכן

$$(\mu\otimes\lambda)(X_i\times Y_j)=\mu(X_i)\lambda(Y_j)$$

ולכן $(\mu\otimes\lambda)=(\mu\otimes\lambda)'$. ■

משפט 2.8 יהיו $(X,\Sigma_x,\mu),(Y,\Sigma_y,\lambda)$ שני מרחבי מידה סיגמא סופיים. אזי:

1. לכל $E\in\Sigma_x\otimes\Sigma_y$ הפונקציות הבאות מדידות:

$$X\to[0,\infty]:x\to\lambda(E_x)$$
$$Y\to[0,\infty]:y\to\mu(E^y)$$

2. לכל $E\in\Sigma_x\otimes\Sigma_y$ מתקיים

$$\int_X\lambda(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_Y\mu(E^y)\,\mathrm{d}\lambda(y)$$

3. אם נגדיר פונקציה

$$\mu\otimes\lambda:\Sigma_x\otimes\Sigma_y\to[0,\infty]$$

על ידי

$$(\mu\otimes\lambda)(E)=\int\limits_X \lambda(E_x)\ \mathrm{d}\mu=\int\limits_Y \mu(E^y)\ \mathrm{d}\lambda$$

אזי $\mu\otimes\lambda$ מידה על $(X\times Y,\Sigma_x\otimes\Sigma_y)$ וכן

$$(\mu\otimes\lambda)(A\times B)=\mu(A)\lambda(B)$$

הוכחה:

1. נראה כי $x\to\lambda(E_x)$ מדידה (החלק השני דומה). יהיו $Y_1,Y_2,\dots\in\Sigma_y$ זרות בזוגות כך שמתקיים

$$Y=\bigcup_j Y_j$$

וכן $\lambda(Y_j)<\infty$ לכל j. נסמן אוסף $\mathcal{C}\subseteq 2^{X\times Y}$:

$$\mathcal{C}=\{E\in\Sigma_x\times\Sigma_y\mid\forall j\ \ \varphi_j:X\to[0,\infty):x\to\lambda(E_x\cap Y_j)\ \text{ is measurable}\}$$

נבדוק כי $\mathcal{C}$ היא מחלקה מונוטונית המכילה כל מלבן מדיד, ואז $\mathcal{C}$ מכילה את האלגברה $\mathcal{A}(\Sigma_x,\Sigma_y)$, ולכן $\mathcal{C}=\Sigma_x\otimes\Sigma_y$. מכאן נסיק כי לכל $E\in\Sigma_x\otimes\Sigma_y$ מתקיים $E\in\mathcal{C}$ ולכן הפונקציה

$$x\to\lambda(E_x)=\lambda\left(\bigcup(E_x\cap Y_j)\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(E_x\cap Y_j)$$

היא מדידה.
ראשית, ברור כי

$$(A\times B)_x=\begin{cases}B & x\in A\\ \emptyset & x\notin A\end{cases}$$

ולכן נקבל

$$(A\times B)_x\cap Y_j=\begin{cases}B\cap Y_j & x\in A\\ \emptyset & x\notin A\end{cases}$$

מכאן נקבל

$$\lambda((A\times B)_x\cap Y_j)=\lambda(B\cap Y_j)\,\chi_A$$

פונקציה מדידה של $x \in X$. לכן נקבל כי כל מלבן מדיד נמצא בתוך $\mathcal{C}$.
נבדוק כי $E \in \mathcal{C}$ אם ורק אם $E^c \in \mathcal{C}$: די להוכיח כיוון אחד. נניח כי $E \in \mathcal{C}$ ונקבל

$$\lambda\left(\left(E^c\right)_x \cap Y_j\right) = \lambda\left(\left(E_x\right)^c \cap Y_j\right) = \lambda\left(Y_j \setminus \left(E_x \cap Y_j\right)\right) = \lambda\left(Y_j\right) - \lambda\left(E_x \cap Y_j\right)$$

וזה סופי, ולכן זו פונקציה מדידה של $x \in X$.
נותר לבדוק כי $\mathcal{C}$ מחלקה מונוטונית. לפי הסגירות למשלים, מספיק להראות כי אם $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{C}$ אזי $\bigcup E_n \in \mathcal{C}$. אכן

$$\lambda\left(\left(\bigcup_n E_n\right)_x \cap Y_j\right) = \lambda\left(\left(\bigcup_n \left(E_n\right)_x\right) \cap Y_j\right) = \lambda\left(\bigcup_n \left(\left(E_n\right)_x \cap Y_j\right)\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\left(E_n\right)_x \cap Y_j\right)$$

וזו כבר פונקציה, כגבול של פונקציות מדידות. לכן $\mathcal{C}$ מחלקה מונוטונית, וסיימנו.

2. באותו אופן כמו שמראים סעיף ג', מקבלים כי הפונקציה

$$\int_Y \mu\left(E^y\right) \,\mathrm{d}\lambda\left(y\right)$$

היא מידה על $\left(X \times Y, \Sigma_x \otimes \Sigma_y\right)$ עם התכונה על המלבנים. מהטענה הקודמת המידה הזו יחידה, ולכן

$$\int_Y \mu\left(E^y\right) \,\mathrm{d}\lambda\left(y\right) = \int_X \lambda\left(E_x\right) \,\mathrm{d}\mu\left(x\right)$$

3. נגדיר $\mu \otimes \lambda$ לפי

$$\left(\mu \otimes \lambda\right)\left(E\right) = \int_X \lambda\left(E_x\right) \,\mathrm{d}\mu\left(x\right)$$

עבור $E \in \Sigma_x \otimes \Sigma_y$. נראה שזו מידה $\left(X \times Y, \Sigma_x \otimes \Sigma_y\right)$. ברור כי $\left(\mu \otimes \lambda\right)\left(\emptyset\right) = 0$.
נניח כי $E_n \in \Sigma_x \otimes \Sigma_y$ סדרת קבוצות זרות בזוגות. אזי לכל $x \in X$ החתכים $\left(E_n\right)_x$ זרים בזוגות, ולכן

$$\lambda\left(\left(\bigcup_n E_n\right)_x\right) = \lambda\left(\bigcup_n \left(E_n\right)_x\right) = \sum_n \lambda\left(\left(E_n\right)_x\right)$$

לכן

$$\begin{aligned}\left(\mu \otimes \lambda\right)\left(\bigcup_n E_n\right) &= \int_X \lambda\left(\left(\bigcup_n E_n\right)_x\right) \,\mathrm{d}\mu = \int_X \sum_n \lambda\left(\left(E_n\right)_x\right) \,\mathrm{d}\mu = \\ &= \sum_n \int_X \lambda\left(\left(E_n\right)_x\right) \,\mathrm{d}\mu = \sum_n \left(\mu \otimes \lambda\right)\left(E_n\right)\end{aligned}$$

נבדוק את התנאי על המלבנים. לכל $x \in X$ מתקיים

$$(A \times B)_x = \{y \mid (x,y) \in A \times B\} = \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases}$$

ולכן

$$\lambda\left((A \times B)_x\right) = \begin{cases} \lambda(B) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

מכאן נקבל כי

$$(\mu \otimes \lambda)(A \times B) = \int\limits_X \lambda\left((A \times B)_x\right) \mathrm{d}\mu(x) = \int\limits_X \chi_A(x) \cdot \lambda(B) \, \mathrm{d}\mu(x) =$$
$$= \lambda(B) \int\limits_X \chi_A(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = \mu(A)\lambda(B)$$

■

טענה 2.9 יהיו X, Y מ רחבים מטריים ספרביליים. אזי $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)$

הוכחה: נקח את $X \times Y$ עם מטריקת המקסימום. אזי כל כדור פתוח של $X \times Y$ הוא מכפלה של כדור פתוח מתוך X עם כדור פתוח מתוך Y. בפרט, כל כדור פתוח בתוך $X \times Y$ שייך לקבוצה $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ (כי הוא מלבן מדיד). מהנתון, $A \times B$ ספרבילי. לכן כל קבוצה פתוחה מתוך $X \times Y$ היא איחוד בן מניה של כדורים פתוחים, ולכן שייכת לקבוצה $\mathcal{B}(x) \otimes \mathcal{B}(y)$. לבסוף, $\mathcal{B}(X \times Y)$ מוגדר כסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי הקבוצות הפתוחות של $X \times Y$, ולכן נקבל

$$\mathcal{B}(X \times Y) \subseteq \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$$

נותר להוכיח את ההכלה השנייה. די להוכיח שאם $B \in \mathcal{B}(Y)$, $A \in \mathcal{B}(X)$, אזי

$$A \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)$$

מאחר ומתקיים

$$A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$$

די להוכיח שכל נחתך שייך אל $\mathcal{B}(X \times Y)$. נוכיח לגבי הראשון, השני דומה.

נסמן $\Omega \subseteq 2^X$ את הקבוצה

$$\Omega = \{A \in \Sigma_X \mid A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)\}$$

בבירור זו סיגמא אלגברה, שכן

$$A^c \times Y = (A \times Y)^c$$
$$\left(\bigcup_i A_i\right) \times Y = \bigcup_i (A_i \times Y)$$

כמו כן, אם $A \subseteq X$ פתוחה אזי $A \times Y \subseteq X \times Y$ פתוחה, ולכן בורל. לכן Ω מכילה את כל הקבוצות הפתוחות של X, ולכן $\mathcal{B}(X) \subseteq \Omega$, ולכן נובע מה שרצינו. $\blacksquare$