פונקציות ממשיות

ארזים ©

11 בדצמבר 2016

1 הבנייה של קרתאודורי

בשיעור שעבר ראינו את ההגדרה של מידה חיצונית ושל קבוצה מדידה קרתאודורי. כמו כן, הוכחנו כי אוסף הקבוצות המדידות קרתאודורי הוא סיגמה אלגברה על הקבוצה, וצמצום המידה החיצונית עליה נותן מידה שלמה.

1.1 קריטריון קרתאודורי לפונקציה מדידה

הגדרה 1.1 יש שני מינוחים:

1. אם $f:X\to Y$ פונקציה, כשעל X הייתה מידה חיצונית שממנה יצרנו את Σ,μ, אזי f תיקרא מדידה (קרתאודורי) אם f מדידה ביחס למרחב המידה (X,Σ,μ).
2. תהי $f:X\to[-\infty,\infty]$. יהיו $A,B\subseteq X$. נאמר כי A,B מופרדות על ידי f אם קיימים $-\infty<a<b<\infty$ עבורם $f\mid_A\leq a, f\mid_B\leq b$. כלומר, לכל $x\in A$ מתקיים $f(x)\leq a$, ולכל $x\in B$ מתקיים $f(x)\geq b$.

משפט 1.2 תהי μ^* מידה חיצונית על X, ותהי $f:X\to[-\infty,\infty]$ פונקציה. אזי f מדידה קרתאודורי אם ורק אם לכל שתי קבוצות $A,B\subseteq X$ המופרדות על ידי f מתקיים

$$\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$$

הוכחה: נניח כי f מדידה קרתאודורי, ויהיו A,B קבוצות שמופרדות על ידי f, כלומר

$$A\subseteq\{x\mid f(x)\leq a\}$$
$$B\subseteq\{x\mid f(x)\geq b\}$$

נסמן $C=\{x\mid f(x)\leq a\}$. אזי C מדידה קרתאודורי, וכן

$$(A\cup B)\cap C=A,(A\cup B)\cap C^c=B$$

כעת מתקיים

$$\mu^*(A\cup B)=\mu^*((A\cup B)\cap C)+\mu^*((A\cup B)\cap C^c)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$$

בכיוון השני, נניח כי התנאי מתקיים ונוכיח כי f מדידה קרתאודורי. די להוכיח שלכל $-\infty<c<\infty$ הקבוצה

$$D=\{x\mid f(x)\le c\}=f^{-1}([-\infty,\infty])$$

מדידה קרתאודורי, כלומר לכל $E\subseteq X$ עם $\mu^*(E)<\infty$ מתקיים

$$\mu^*(E)\ge\mu^*(E\cap D)+\mu^*(E\cap D^c)$$

לאור התנאי במשפט, לכל $j=1,2,\ldots$ מתקיים

$$\mu^*(E)\ge\mu^*\left((E\cap\{f\le c\})\cup\left(E\cap\left\{c+\frac{1}{j}\le f\right\}\right)\right)$$

אלה קבוצות שאותן f מפרידה, ולכן

$$\mu^*(E)\ge\mu^*(E\cap D)+\mu^*\left(E\cap\left\{c+\frac{1}{j}\le f\right\}\right)$$

לכן כל שנותר להוכיח הוא שמתקיים

$$\lim_{j\to\infty}\mu^*\left(E\cap\left\{c+\frac{1}{j}\le f\right\}\right)\ge\mu^*(E\cap\{c<f\})$$

אבל לכל j מתקיים

$$\mu^*\left(E\cap\left\{c+\frac{1}{j}\le f\right\}\right)+\mu^*\left(E\cap c<f<c+\frac{1}{j}\right)\ge\mu^*(E\cap\{c<f\})$$

לכן די להראות למעשה

$$\lim_{j\to\infty}\mu^*\left(E\cap\left\{c<f<c+\frac{1}{j}\right\}\right)=0$$

כעת, μ^* מידה חיצונית, ולכן לכל j מתקיים

$$\mu^*\left(E\cap\left\{c<f<c+\frac{1}{j}\right\}\right)\le\sum_{n=j}^{\infty}\mu^*\left(E\cap\left\{c+\frac{1}{n+1}<f<c+\frac{1}{n}\right\}\right)$$

לכן די להוכיח למעשה

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*\left(E\cap\left\{c+\frac{1}{n+1}<f<c+\frac{1}{n}\right\}\right)<\infty$$

לכל n, הקבוצות

$$E\cap\left\{c+\frac{1}{2n+1}\le f<c+\frac{1}{2n}\right\}$$

$$E\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}\left\{c+\frac{1}{2k+1}\le f<c+\frac{1}{2k}\right\}\right)$$

מופרדות על ידי f שכן הראשונה מוכלת בתוך $\left\{f<c+\frac{1}{2n}\right\}$, בעוד השנייה נמצאת בתוך $\left\{c+\frac{1}{2n-1}\le f\right\}$. לכן לפי התנאי שבמשפט נקבל

$$\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n}c+\frac{1}{2k+1}\le f<f+\frac{1}{2k}\right)\right)=\mu^*\left(E\cap\left\{c+\frac{1}{2n+1}\le f<c+\frac{1}{2n}\right\}\right)+$$
$$+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n-1}\left\{c+\frac{1}{2k+1}\le f<c+\frac{1}{2k}\right\}\right)\right)$$

באינדוקציה נובע כי

$$\infty>\mu^*(E)\ge\mu^*\left(E\cap\bigcup_{k=1}^{n}\left\{c+\frac{1}{2k+1}\le f<c+\frac{1}{2k}\right\}\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\mu^*\left(E\cap\left\{c+\frac{1}{2k+1}\le f<c+\frac{1}{2k}\right\}\right)$$

לכן הסכום על האינדקסים הזוגיים של הטור מתכנס. באופן דומה ניתן לקבל כי גם באינדקסים האי־זוגיים הטור מתכנס, ולכן הוא מתכנס באופן כללי. ■

1.2 מידה חיצונית מטרית

1.2.1 הכנה

הגדרה 1.3 יהי X מרחב מטרי, ויהיו $A,B\subseteq X$. נסמן

$$\delta(A,B)=\inf\{d(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

הערה 1.4 זו לא מטריקה!

הגדרה 1.5 עבור $x \in X$, $B \subseteq X$ מסמנים

$$\operatorname{dist}(x, B) = \inf \{d(x, y) \mid y \in B\}$$

תכונות

1. נניח כי B סגורה. אזי $\operatorname{dist}(x, B) = 0$ אם ורק אם $x \in B$. אכן, נראה שלכל קבוצה A, $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ אם ורק אם $x \in \overline{A}$. זה מיידי שכן $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ שקול לקיום סדרה $\{a_n\} \subseteq A$ עבורה $\operatorname{dist}(x, a_n) \to 0$ כלומר $a_n \to x$.
2. לכל $x, z \in X$ מתקיים

$$|\operatorname{dist}(x, B) - \operatorname{dist}(z, B)| \leq d(x, z)$$

בפרט, הפונקציה

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(\cdot, B) : X &\to [0, \infty) \\ x &\to \operatorname{dist}(x, B) \end{aligned}$$

היא רציפה (ליפשיץ עם קבוע 1).

1.2.2 מידה חיצונית מטרית

הגדרה 1.6 יהי X מרחב מטרי, ותהי μ^* מידה חיצונית על X. μ^* תיקרא <u>מידה חיצונית מטרית</u> אם לכל $A, B \subseteq X$ עם $\delta(A, B) > 0$ מתקיים

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

משפט 1.7 תהי μ^* מידה חיצונית מטרית על מרחב מטרי X. אזי כל קבוצת בורל מדידה קרתאודורי.

הוכחה: די להוכיח שכל קבוצה $F \subseteq X$ סגורה מדידה קרתאודורי. נגדיר פונקציה

$$f : X \to [0, \infty)$$

על ידי

$$f(x) = \operatorname{dist}(x, F)$$

אזי, מתכונה 1 שהוכחנו קודם, נקבל $F = f^{-1}(0)$, ולכן די להוכיח כי f מדידה קרתאודורי. בשביל זה מספיק להוכיח כי אם $A, B \subseteq X$ מופרדות על ידי f אזי

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

תהיינה A, B קבוצות שמופרדות על ידי f. אזי קיימים $-\infty < a < b < \infty$ עבורם

$$A \subseteq \{f \leq a\}, B \subseteq \{f \geq b\}$$

כעת, לכל $x \in A, y \in B$, מתקיים

$$d(x,y) \geq |\mathrm{dist}(x,F) - \mathrm{dist}(y,F)| = |f(x) - f(y) \geq b - a|$$

לכן נובע כי $\delta(A,B) \geq b - a > 0$, ומכיוון שלקחנו μ^* מידה חיצונית מטרית, מתקיים השוויון שרצינו. ∎

2 מידת סטילטיס $(Stieltjes)$ על $\mathbb{R}$

בהינתן f פונקציה, נרצה להתאים אותה למידה. נעשה זאת על ידי

$$\mu((a,b]) = f(b) - f(a)$$

עבור $a < b < c$ מתקיים

$$\mu((a,c]) = \mu((a,b] \cup (b,c]) = \mu((a,b]) + \mu((b,c]) = f(b) - f(a) + f(c) - f(b) = f(c) - f(a)$$

כמובן שבשביל לקבל מידה כמו שצריך , נצטרך את f מונוטונית עולה וכן רציפה מימין: אם $b_n \searrow b$ אזי

$$\lim_{b\to\infty} \mu((a,b_n]) = \mu\left(\bigcap_n (a,b_n]\right) = \mu((a,b])$$

2.1 מינוחים

הגדרה 2.1 מידת בורל על $\mathbb{R}$ תהיה מידה μ שסופית על קבוצות בורל חסומות, במרחב המידה $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$.

הערה 2.2 ראינו כי μ רגולרית.

הגדרה 2.3 פונקציה מונוטונית עולה במובן החלש היא פונקציה עבורה אם $x < y$ אזי $f(x) \leq f(y)$.

הגדרה 2.4 פונקציה רציפה מימין אם

$$\lim_{t\to x^+} f(t) = f(x)$$

טענה 2.5 תהי μ מידת בורל סופית על קבוצות חסומות על $\mathbb{R}$.אזי μ נקבעת באופן יחיד על ידי הערכים $\mu\left((a,b]\right)$ לכל $a<b$.

הוכחה: $\mu\left((a,b)\right)$ נקבע על ידי

$$\mu\left(\left(a,b-\frac{1}{n}\right]\right)\to\mu\left(a,b\right)$$

ולכן המידה של כל קבוצה פתוחה נקבעת. לכן μ נקבעת באופן יחיד לפי רגולריות. ■

למה 2.6 תהי μ מידת בורל על $\mathbb{R}$, ונגדיר פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ על פי

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\mu\left((0,x]\right) & x>0\\ 0 & x=0\\ -\mu\left((x,0]\right) & x<0\end{cases}$$

אזי f מונוטונית עולה במובן החלש, רציפה מימין ומתקיים

$$\mu\left((a,b]\right)=f\left(b\right)-f\left(a\right)$$

לכל $a<b$. בפרט μ נקבעת ביחידות על פי f.

הלמה הזו ברורה, ולא נוכיח אותה.

2.2 תיאור ההתאמה

משפט 2.7 קיימת התאמה חד־חד־ערכית ועל בין קבוצת מידות בורל סופיות על קבוצות חסומות על $\mathbb{R}$, לבין קבוצת הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המונוטוניות עולות במובן החלש, רציפות מימין ומקיימות $f\left(0\right)=0$, הניתנת לפי הבניה בלמה הקודמת. בפרט אם f, μ מתאימות אחת לשניה, אזי

$$\mu\left((a,b]\right)=f\left(b\right)-f\left(a\right)$$

לכל $a<b$.

הוכחה: די להוכיח שההתאמה על (חד־חד־ערכיות ניתנת על ידי הלמה הקודמת). תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית עולה במובן החלש, רציפה מימין עם $f\left(0\right)=0$. נגדיר מידה חיצונית על $\mathbb{R}$ באופן הבא (<u>כל הסכומים והאיחודים הינם בני מניה</u>):

$$\mu^{*}\left(E\right)=\inf\left\{\sum_{i}f\left(b_{i}\right)-f\left(a_{i}\right)\mid E\subseteq\bigcup_{i}\left(a_{i},b_{i}\right]\right\}\tag{1}$$

f רציפה מימין, ולכן מתקיים גם

$$\mu^{*}\left(E\right)=\inf\left\{\sum_{i}f\left(b_{i}\right)-f\left(a_{i}\right)\mid E\subseteq\bigcup_{i}\left(a_{i},b_{i}\right)\right\}\tag{2}$$

אכן, מתוך $(a_i,b_i)\subseteq(a_i,b_i]$ נקבל כי $(2)\le(1)$. מצד שני, נתייחס לסכום $\sum f(b_i)-f(a_i)$ המופיע בביטוי (1).
יהי $\varepsilon>0$. לכל i ניקח $b_i<b_i'$, עם $f(b_i)<f(b_i')+\frac{\varepsilon}{2^i}$. אזי

$$E\subseteq\bigcup_i(a_i,b_i]\subseteq\bigcup_i(a_i,b_i')$$

לכן נקבל

$$(2)\le\sum_i f(b_i')-f(a_i)<\left(\sum f(b_i)-f(a_i)\right)+\varepsilon$$

לכן קיבלנו $(2)\le(1)+\varepsilon$, ולקחנו ε שרירותי, לכן $(2)\le(1)$ וקיבלנו את השוויון.
נשים לב שאם נחלק $(a,b]=(a,c]\cup(c,b]$, ואז

$$f(b)-f(a)=f(c)-f(a)+f(b)-f(c)$$

לכן לכל מספר $\delta>0$ נתקיים גם

$$\mu^*(E)=\inf\left\{\sum_i f(b_i)-f(a_i)\mid E\subseteq\bigcup(a_i,b_i],0<b_i-a_i<\delta\right\}\qquad(3)$$

כעת, מתוך (1) נובע כי μ^* מידה חיצונית ־ שכן

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\le\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)$$

מתוך (3) נובע כי μ^* מידה חיצונית מטרית. אם $\delta=\delta(A,B)>0$, אזי נוכל לקחת כיסוי עם קטעים עדינים מספיק בשביל שנוכל לחלק אותו לשני כיסויים, אחד של A ואחד של B, ולקבל

$$\mu^*(A\cup B)=\mu^*(A)+\mu^*(B)$$

אם כן, אוסף הקבוצות Σ המדידות קרתאודורי הוא סיגמא אלגברה, הפונקציה $\mu'=\mu^*\mid_\Sigma$ היא מידה, וכן שכל קבוצת בורל מדידה. לכן, אם נסמן

$$\mu=\mu'\mid_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}=\mu^*\mid_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$$

נקבל מידה. נשים לב שמתקיים

$$\mu((a,b])=\mu^*((a,b])\le f(b)-f(a)<\infty$$

לכן קיבלנו מידת בורל μ שסופית על קבוצות בורל חסומות. נותר רק לבדוק כי μ תישלח על ידי ההתאמה אל f, כלומר

$$\mu\left((a,b]\right)=f\left(b\right)-f\left(a\right)$$

ראינו את האי שוויון $\leq$, נראה כעת את השני.
לכל $0<\varepsilon<b-a$, מתקיים

$$\mu\left([a+\varepsilon,b]\right)=\inf\left\{ \sum_{i=1}^{N}f\left(b_{i}\right)-f\left(a_{i}\right)\mid[a+\varepsilon]\subseteq\bigcup_{i=1}^{N}\left(a_{i},b_{i}\right)\right\}$$

שוויון זה נובע מתוך (2) וממשפט היינה־בורל. אבל, באינדוקציה על N, נקבל

$$[a,\beta]\subseteq\bigcup_{i=1}^{N}\left(a_{i}-b_{i}\right)\Rightarrow f\left(\beta\right)-f\left(\alpha\right)\leq\sum_{i=1}^{N}f\left(b_{i}\right)-f\left(a_{i}\right)$$

אכן, אפשר להניח $\beta\in\left(a_{N},b_{N}\right)$, ונניח $a_{n}>\alpha$. אז

$$[\alpha,a_{N}]\subseteq\bigcup_{i=1}^{N-1}\left(a_{i},b_{i}\right)$$

ובאינדוקציה:

$$\begin{aligned}f\left(\beta\right)-f\left(\alpha\right)=f\left(\beta\right)-f\left(a_{N}\right)+f\left(a_{n}\right)-f\left(\alpha\right)\leq\\ \leq f\left(b_{N}\right)-f\left(a_{N}\right)+\sum_{i=1}^{N-1}f\left(b_{i}\right)-f\left(a_{i}\right)=\sum_{i=1}^{N}f\left(b_{i}\right)-f\left(a_{i}\right)\end{aligned}$$

מכאן נסיק כי מתקיים

$$\mu\left([a+\varepsilon,b]\right)\geq f\left(b\right)-f\left(a+\varepsilon\right)$$

ואז נקבל

$$\mu\left((a,b]\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\mu\left([a+\varepsilon,b]\right)\geq\lim_{\varepsilon\to0}\left(f\left(b\right)-f\left(a+\varepsilon\right)\right)=f\left(b\right)-f\left(a\right)$$

שכן f רציפה מימין. בסך הכל נקבל כי אכן

$$\mu\left((a,b]\right)=f\left(b\right)-f\left(a\right)$$

כפי שרצינו. ■

הערה 2.8 μ נקראת מידת בורל־סטילטיס המתאימה לפונקציה f, וההשלמה של μ תיקרא מידת סטילטיס המתאימה לפונקציה f.

הערה 2.9 נניח כי μ, f מתאימות זו לזו לפי ההתאמה שלנו.

1. לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\mu\left(\{x\}\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{n},x\right]\right) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(\left(x-\frac{1}{n},x\right]\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} f\left(x\right) - f\left(x-\frac{1}{n}\right) = f\left(x\right) - \lim_{t\to x^-} f\left(t\right)$$

כלומר הקפיצה של f בנקודה x.

2. $\mu\left(\{x\}\right) = 0$ אם ורק אם f רציפה בנקודה x.

3. הפונקציה f חסומה על $\mathbb{R}$ אם ורק אם $\mu\left(\left(-\infty,\infty\right)\right) < \infty$, כלומר μ מידה סופית. אכן, תמיד:

$$\mu\left(\left(-\infty,\infty\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-n,n\right]\right) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(\left(-n,n\right]\right) = \lim_{n\to\infty}\left(f\left(n\right)-f\left(-n\right)\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} f\left(x\right) - \lim_{x\to-\infty} f\left(x\right) = \text{"} f\left(\infty\right) - f\left(-\infty\right) \text{"}$$

2.3 קיום מידת לבג על $\mathbb{R}$

נקח $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לפי $f\left(x\right)=x$. נסמן בתור $\left(\mathbb{R},\Sigma,m\right)$ את מידת קרתאודורי המתקבלת. אזי m מידה שלמה, וכן

$$m\left(\left(a,b\right]\right) = b-a$$

נצמצם את m לקבוצות בורל $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$. נקבל מידת בורל סופית על קבוצות חסומות, וכן

$$m\left(\left(a,b\right]+x\right) = m\left(\left(a+x,b+x\right]\right) = \left(b+x\right)-\left(a+x\right) = b-a = m\left(\left(a,b\right]\right)$$

לכן m אינווריאנטית להזזות. מכאן קיימת מידת בורל־לבג על $\mathbb{R}$, וההשלמה שלה היא מידת לבג על $\mathbb{R}$.