פונקציות ממשיות

© ארזים

4 בדצמבר 2016

1 רגולריות

1.1 הכנה

טענה 1.1 תהי $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ משפחה בת מניה של קבוצות סגורות במרחב $\mathbb{R}^d$. נניח שכל קבוצה חסומה במרחב $\mathbb{R}^d$ חותכת רק מספר סופי מבין הקבוצות במשפחה. אזי $\bigcup F_n$ קבוצה סגורה.

הוכחה: תהי x_i סדרת נקודות מהאיחוד שמתכנסת אל x. אזי $\{x_i\}$ קבוצה חסומה, ולכן קיים N כך שעבורו מתקיים

$$\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} F_n$$

אבל האיחוד הסופי הזה סגור, ולכן

$$x \in \overline{\bigcup_{n=1}^{N} F_n} = \bigcup_{n=1}^{N} F_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

ולכן האיחוד האינסופי סגור. ■

טענה 1.2 אם X מרחב מטרי, $O \subseteq X$ פתוחה. אזי קיימת סדרה $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq O$, כך שכל F_i סגורה, והאיחוד של כולן הוא O.

הוכחה: נקח

$$F_n = \left\{ x \in O \mid B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq O \right\}$$

ברור כי אלה חלקיות לקבוצה O, וכי איחודן הוא הקבוצה כולה. נבדוק שהן סגורות. נניח כי $F_n \ni x_i \to x$.נרצה להראות כי $x \in F_n$, כלומר $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq O$. יהי $y \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$. מתקיים

$$d(x_i, y) \to d(x, y) < \frac{1}{n}$$

לכן קיים i עבורו $d\left(x_i,y\right)<\frac{1}{n}$, כלומר $y\in B\left(x_i,\frac{1}{n}\right)\subseteq O$, שכן $x_i\in F_n$. לכן F_n אכן כולן סגורות. ■

1.2 סימונים

בכל הפרק הזה, $\left(\mathbb{R}^d,\Sigma,\mu\right)$ מרחב מידה כך שמתקיים:

1. $B\left(\mathbb{R}^d\right)\subseteq\Sigma$, כלומר כל קבוצת בורל מדידה.
2. אם $A\in\Sigma$ חסומה אזי $\mu\left(A\right)<\infty$. כלומר, המידה של כל קבוצה מדידה וחסומה היא סופית. באופן שקול, לכל n,

$$\mu\left(\left[-n,n\right]^d\right)<\infty$$

הגדרה 1.3 קבוצה $E\in\Sigma$ נקראת <u>רגולרית מבחוץ</u> אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת $E\subseteq O\subseteq\mathbb{R}^d$, כאשר O פתוחה, וכך שמתקיים

$$\mu\left(O\backslash E\right)<\varepsilon$$

תכונות

1. כל קבוצה פתוחה רגולרית מבחוץ.
2. אם $E_1,E_2,\ldots$ רגולריות מבחוץ, אזי $E=\bigcup E_n$ רגולרית מבחוץ. **הוכחה:** יהי $\varepsilon>0$. לכל n קיימת קבוצה פתוחה $E_n\subseteq O_n\subseteq\mathbb{R}^d$ עם $\mu\left(O_n\backslash E_n\right)<\frac{\varepsilon}{2^n}$. ניקח $O=\bigcup O_n$, ואז $E\subseteq O\subseteq\mathbb{R}^d$, O פתוחה, וכן

$$\mu\left(O\backslash E\right)=\mu\left(\bigcup O_n\backslash\bigcup E_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(O_n\backslash E_n\right)<\varepsilon$$

■

3. חיתוך מספר סופי של קבוצות רגולריות מבחוץ הוא רגולרי מבחוץ. **הוכחה:** די לבדוק עבור שתי קבוצות. יהיו E_1,E_2 רגולריות מבחוץ, ויהי $\varepsilon>0$. קיימות $E_i\subseteq O_i\subseteq\mathbb{R}^d$, עם O_i פתוחה, עבור $i=1,2$, כך שמתקיים $\mu\left(O_i\backslash E_i\right)<\frac{\varepsilon}{2}$. כעת $O_1\cap O_2$ פתוחה, וכן $E_1\cap E_2\subseteq O_1\cap O_2\subseteq\mathbb{R}^d$. כמו כן

$$\left(O_1\cap O_2\right)\setminus\left(E_1\cap E_2\right)\subseteq\left(O_1\backslash E_1\right)\cup\left(O_2\backslash E_2\right)$$

ואז מתקיים

$$\mu\left(\left(O_1\cap O_2\right)\setminus\left(E_1\cap E_2\right)\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

■

4. אם $E\in\Sigma$ רגולרית מבחוץ אזי

$$\mu(E)=\inf_{\substack{E\subseteq O\subseteq\mathbb{R}^d\\ O\,is\,open}}\mu(O)$$

הוכחה: האי שוויון בכיוון $\leq$ מיידי. עבור האי שוויון השני, אם $\mu(E)=\infty$, הוא גם מיידי. נניח כי $\mu(E)<\infty$. לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה פתוחה $E\subseteq O\subseteq\mathbb{R}^d$ עם $\mu(O\backslash E)<\varepsilon$. אז נובע כי

$$\mu(O)=\mu(E)+\mu(O\backslash E)\leq\mu(E)+\varepsilon$$

לכן מתקיים

$$\inf_{\substack{E\subseteq O\subseteq\mathbb{R}^d\\ O\,is\,open}}\mu(O)\leq\mu(E)$$

■

5. **הגדרה 1.4** במרחב מטרי X, חיתוך משפחה בת מניה של קבוצות פתוחות נקראת קבוצת G_δ.

כעת, אם $E\subseteq\Sigma$ רגולרית מבחוץ, אזי קיימת קבוצת G_δ A, שעבורה $E\subseteq A\subseteq\mathbb{R}^d$, וכך שמתקיים $\mu(A\backslash E)=0$, ובפרט $\mu(A)=\mu(E)$. **הוכחה:** לכל n קיימת $E\subseteq O_n\subseteq\mathbb{R}^d$, כאשר $O_n\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה עם $\mu(O_n\backslash E)<\frac{1}{n}$. כעת נקח $A=\bigcap O_n$. אזי

$$\mu(A\backslash E)\leq\mu(O_n\backslash E)<\frac{1}{n}$$

וזה נכון לכל n, ולכן $\mu(A\backslash E)=0$. ■

הגדרה 1.5 קבוצה $E\in\Sigma$ <u>רגולרית מבפנים</u> אם לכל $\varepsilon>0$ קיימת קבוצה סגורה $F\subseteq E$ כך שמתקיים $\mu(E\backslash F)<\varepsilon$.

טענה 1.6 (קשר בין רגולריות מבפנים לרגולריות מבחוץ) E רגולרית מבחוץ אם ורק אם E^c רגולרית מבפנים.

הוכחה: נניח כי E רגולרית מבחות, ויהי $\varepsilon>0$. קיימת $E\subseteq G$, כאשר G פתוחה, עם $\mu(G\backslash E)<\varepsilon$. אזי $G^c\subseteq E^c$, כמובן G^c סגורה, ומתקיים $\mu(E^c\backslash G^c)=\mu(G\backslash E)<\varepsilon$.
הכיוון השני דומה בעזרת משלימים. ■

מסקנה 1.7 1. חיתוך כמות בת מניה של קבוצות רגולריות מבפנים הוא רגולרי מבפנים.

2. איחוד מספר סופי של קבוצות רגולריות מבפנים הוא רגולרי מבפנים.

מסקנות אלה נובעות מהתכונות של רגולריות מבחוץ ומהטענה האחרונה.

טענה 1.8 תהי $E_n \subseteq \mathbb{R}^d$ סדרת קבוצות רגולריות מבפנים, ונסמן $E = \bigcup E_n$. אזי כל אחד מהבאים מבטיח כי E רגולרית מבפנים:

1. $\sum \mu(E_n) < \infty$.
2. כל קבוצה חסומה חותכת מספר סופי מבין $E_1, E_2, \ldots$.

הוכחה:

1. יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך שעבורו

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(E_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

כעת, לכל $1 \leq n \leq N$, קיימת $F_n \subseteq E_n$, F_n סגורה במרחב $\mathbb{R}^d$ עם $\mu(E_n \backslash F_n) = \frac{\varepsilon}{2N}$. נסמן

$$F = \bigcup_{n=1}^{N} F_n$$

כמובן F סגורה, וכן

$$F \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} E_n \subseteq E$$

וכן מתקיים

$$\begin{aligned}
\mu(E \backslash F) &\leq \mu\left(\left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) \backslash F\right) \cup \left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} E_n\right)\right) \leq \\
&\leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} (E_n \backslash F_n)\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} \mu(E_n) \leq \\
&\leq N \cdot \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

2. יהי $\varepsilon > 0$. לכל n יש $F_n \subseteq E_n$, כאשר F_n סגורה, ומתקיים

$$\mu(E_n \backslash F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

נסמן

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

אזי F סגורה, כי כל קבוצה חסומה חותכת רק מספר סופי מבין הקבוצות הסגורות $F_1, F_2, \ldots$. כמובן $F \subseteq E$, ולבסוף

$$\mu\left(E \backslash F\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(E_n \backslash F_n\right) < \varepsilon$$

1.3 רגורליות

■

הגדרה 1.9 קבוצה $E \in \Sigma$ נקראת <u>רגולרית</u> אם E רגולרית מבפנים ומבחוץ, כלומר אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימות $F \subseteq E \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^d$, כאשר F סגורה, G פתוחה, ומתקיים

$$\mu\left(G \backslash E\right), \mu\left(E \backslash F\right) < \varepsilon$$

באופן שקול, E רגולרית אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימות $F \subseteq E \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^d$, כאשר F סגורה, G פתוחה, ומתקיים

$$\mu\left(G \backslash F\right) = \mu\left(G \backslash E\right) + \mu\left(E \backslash F\right) < \varepsilon$$

טענה 1.10 אוסף הקבוצות הרגולריות הוא אלגברה.

הוכחה: כמובן, $\emptyset$ רגולרית. אם E רגולרית אז E רגולרית מבחוץ ומבפנים, ולכן E^c רגולרית מבפנים ומבחוץ, E^c רגולרית. אם E_1, E_2 רגולרית ראינו כי $E_1 \cup E_2$ רגולרית מבחוץ ומבפנים ולכן $E_1 \cup E_2$ רגולרית. ■

הגדרה 1.11 המידה μ נקראת רגולרית אם כל $E \in \Sigma$ היא רגולרית.

סימונים עבור המשך הפרק: נסמן סדרת קבוצות פתוחות במרחב $\mathbb{R}^d$:

$$\Gamma_1 = B\left(0,2\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid ||x|| < 2\right\}$$
$$\Gamma_k = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid k-1 < ||x|| < k+1\right\}$$

כאן

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \left|x_i\right|^2}$$

כמובן Γ_k פתוחה לכל k, ואיחודן הוא כל המרחב. כל קבוצה חסומה חותכת רק מספר סופי מביניהן.

טענה 1.12 כל קבוצה פתוחה $O \subseteq \mathbb{R}^d$ היא רגולרית.

הוכחה: ראינו כבר שהיא רגולרית מבחוץ. נותר להראות שהיא רגולרית מבפנים. מתקיים כמובן

$$O = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\Gamma_k \cap O\right)$$

מאחר שכל קבוצה חסומה חתוכת רק מספר סופי מבין $O \cap \Gamma_k$, די להוכיח שכל אחת מבין $O \cap \Gamma_k$ רגולרית מבפנים. זו קבוצה פתוחה, כמובן, ולכן די להוכיח שאם $O \subseteq \mathbb{R}^d$ פתוחה וחסומה אזי O רגולרית מבפנים. מאחר שהנחנו כי O חסומה, נובע כי $\mu\left(O\right) < \infty$.
ראינו שקיימות קבוצות סגורות $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq O$ כך שמתקיים

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = O$$

כעת מתקיים

$$\left(O \backslash F_1\right) \supseteq \left(O \backslash F_2\right) \supseteq \ldots$$

וכן $\mu\left(O \backslash F_1\right) < \infty$, ולכן מטענה שראינו בעבר מתקיים

$$\lim_{n \to \infty} \mu\left(O \backslash F_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(O \backslash F_n\right)\right) = \mu\left(\emptyset\right) = 0$$

לכן קיים n עבורו $\mu\left(O \backslash F_n\right) < \varepsilon$, ולכן O רגולרית מבפנים. ■

משפט 1.13 תהי μ מידת בורל על $\mathbb{R}^d$ (כלומר $\Sigma = B\left(\mathbb{R}^d\right)$), כך שמתקיים $\mu\left(E\right) < \infty$ לכל $E \in \Sigma$ חסומה. אזי μ רגולרית.

הוכחה: ראינו שכל קבוצה פתוחה היא רגולרית. לכן די להוכיח שאוסף הקבוצות הרגולריות הוא סיגמא אלגברה. ראינו כבר כי אוסף זה הוא אלגברה. לכן די להוכיח שאם $E_1, E_2, \ldots$ זרות בזוגות ורגולריות, אזי $E = \bigcup E_n$ רגולרית.
ראינו כבר כי E רגולרית מבחוץ, ונתור להוכיח שהיא רגולרית מבפנים. לכל k מתקיים

$$E \cap \Gamma_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cap \Gamma_k\right)$$

וכעת $E_1 \cap \Gamma_k, E_2 \cap \Gamma_k, \ldots$ זרות בזוגות, ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(E_n \cap \Gamma_k\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(E_n \cap \Gamma_k\right)\right) = \mu\left(E \cap F_k\right) \leq \mu\left(\Gamma_k\right) < \infty$$

כעת, Γ_k רגולרית (מבפנים), כי היא פתוחה, וכן E_n רגולרית מבפנים (נתון). לכן $E_n \cap \Gamma_k$ היא רגולרית מבפנים לכל m, k. מהאי שוויון שלעיל נובע כי

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap \Gamma_k) = E \cap \Gamma_k$$

רגולרית מבפנים.

לבסוף, כל קבוצה חסומה חותכת רק מספר סופי מבין הסדרה $E \cap \Gamma_1, E \cap \Gamma_2, \ldots$, ומאחר שכל קבוצה בסדרה היא רגולרית מבפנים, ראינו שנובע כי $E = \bigcup (E \cap \Gamma_k)$ היא רגולרית מבפנים. ■

הערה 1.14 תהי μ מידת בורל על $\mathbb{R}^d$, שסופית על קבוצות בורל חסומות. אזי ההשלמה $\overline{\mu}$ של μ היא רגולרית.

הוכחה: ראינו כי μ רגולרית. נסמן $\left(\mathbb{R}^d, \overline{\Sigma}, \overline{\mu}\right)$ את ההשלמה. תהי $E \in \overline{\Sigma}$, ויהי $\varepsilon > 0$. קיימות $A \subseteq E \subseteq B$, כאשר A, B בורל עם $\mu(B \backslash A) = 0$. מרגולריות μ קיימות O פתוחה וכן F סגורה המקיימות

$$B \subseteq O, F \subseteq A$$
$$\mu(O \backslash B), \mu(A \backslash F) < \frac{\varepsilon}{2}$$

לבסוף, $F \subseteq E \subseteq O$ וכן מתקיים

$$\mu(O \backslash F) = \mu(O \backslash B) + \mu(B \backslash A) + \mu(A \backslash F) < \frac{\varepsilon}{2} + 0 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

2 יחידות מידת בורל על $\mathbb{R}^d$ אינווריאנטית להזזות

היחידות היא למעשה עד כדי כפל בסקלר חיובי, של מידות בורל שהן סופיות על קבוצות חסומות.

2.0.1 קטעים בתוך $\mathbb{R}$

לכל n טבעי, נתייחס לקטעים חצי פתוחים בתוך $\mathbb{R}$ מהסוג

$$\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]$$

לכל k שלם. נאמר כי קטע מסוג זה הו מסדר n.

תכונות

1. לכל n, $\mathbb{R}$ הוא איחוד זר של כל הקטעים מסדר n.
2. כל קטע מסדר $n \geq 1$ מוכל בקטע יחיד מסדר $n-1$: לכל t שלם מתקיים

$$\left(\frac{2t}{2^n}, \frac{2t+1}{2^n}\right] \cup \left(\frac{2t+1}{2^n}, \frac{2t+2}{2^n}\right] = \left(\frac{t}{2^{n-1}}, \frac{t+1}{2^{n-1}}\right]$$

2.0.2 כיסוי קבוצות פתוחות על ידי קוביות

כעת נתייחס למרחב $\mathbb{R}^d$. לכל n טבעי נתעעיס לקוביות לקוביות במרחב $\mathbb{R}^d$ מהצורה

$$\left(\frac{k_1}{2^n},\frac{k_1+1}{2^n}\right]\times\cdots\times\left(\frac{k_d}{2^n},\frac{k_d+1}{2^n}\right]$$

כאשר k_i שלם לכל i. קוביה כזו תיקרא קוביה מסדר n.

תכונות

1. לכל n, $\mathbb{R}^d$ הוא איחוד זר של כל הקוביות מסדר n.
2. כל קוביה מסדר $n\geq 1$ מוכלת בקוביה יחידה מסדר $n-1$.
3. כל קוביה מסדר n היא איחוד זר של 2^d קוביות מסדר $n+1$.
4. שתי קוביות מהסג שלעיל הן זרות או שאחת מכילה את השנייה. **הוכחה:** אם Q קוביה מסדר n, Q' קוביה מסדר m, ונניח כי $n\geq m$. נרצה להראות כי $Q'\subseteq Q$ או $Q\cap Q'=\emptyset$.

   נניח שהחיתוך אינו ריק, ונראה כי $Q'\subseteq Q$. נוכיח זאת באינדוקציה על $m-n\geq 0$. המקרה $m-n=0$ נובע מהתכונה הראשונה (Q,Q' מאותו סדר).

   נניח כי $m>n$. לפי תכונה 2, קיימת קוביה יחידה Q'' מסדר $m-1$ עבורה $Q'\subseteq Q''$. אזי $Q''\cap Q\neq\emptyset$, שכן $Q'\cap Q\neq\emptyset$. מהנחת האינדוקציה נקבל $Q''\subseteq Q$, ולכן $Q'\subseteq Q''\subseteq Q$. ■

למה 2.1 תהי $G\subseteq\mathbb{R}^d$ פתוחה. אזי G היא איחוד זר של קוביות מהסוג שלעיל.

הוכחה: נראה כי G איחוד זר של אוסף הקוביות המקסימליות (מהסוג לעיל) המוכלות בה.
אכן, מאחר שהקבוצה G פתוחה, כל $x\in G$ מוכל בקוביה מסוג זה. קיים $n\geq 0$ מינימלי עבורו x מוכל בקוביה מסדר n, וברור שקוביה זו מקסימלית מבין הקוביות.
נראה שזהו איחוד זר. תהיינה Q',Q'' שתי קוביות מקסימליות המוכלות בקבוצה G, כך שמתקיים $Q'\cap Q''\neq\emptyset$. מתכונה 4, נובע כי אחת מוכלת בשנייה, ואז מהמקסימליות נובע כי הן שוות. ■

הערה 2.2 אוסף כל הקוביות לעיל היא קוביה בת מניה.

2.0.3 הגדרות

הגדרה 2.3 יהי $\left(\mathbb{R}^d,\Sigma,\mu\right)$ מרחב מידה. אומרים כי μ אינווריאנטית להזזות אם לכל $A\subseteq\mathbb{R}^d$ ולכל $v\in\mathbb{R}^d$ מתקיים

$$A\in\Sigma\iff A+v\in\Sigma$$

ובמקרה זה $\mu\left(A\right)=\mu\left(A+v\right)$. הסימון אומר

$$A+v=\{x+v\mid x\in A\}$$

הערה 2.4 נסמן $Q_0 = (0,1]^d \subseteq \mathbb{R}^d$. אזי למידה $\left(\mathbb{R}^d, \Sigma, \mu\right)$ אינווריאנטית להזזות שעבורה $Q_0 \in \Sigma$ מתקיים:

1. $\mu \neq 0$ אם ורק אם $\mu\left(Q_0\right) > 0$.
2. μ סופית על קבוצות מדידות וחסומות אם רק אם $\mu\left|Q_0\right| < \infty$.

2.0.4 משפט היחידות

משפט 2.5 עד כדי כפל בסקלר חיובי, קיימת לכל היותר מידת בורל אחת $\left(\mathbb{R}^d, B\left(\mathbb{R}^d\right), \mu\right)$ שהינה אינווריאנטית להזזות, שונה מאפס, וסופית על קבוצות בורל חסומות.

הוכחה: תהי μ כמו במשפט, אזי $0 < \mu\left(Q_0\right) < \infty$. על ידי כפל בסקלר חיובי אפשר להניח $\mu\left(Q_0\right) = 1$. נאה כי μ יחידה עם ערך זה.

מאחר והמידה μ רגולרית, מתקיים לכל A בורל

$$\mu\left(A\right) = \inf_{\substack{A \subseteq O \\ O\, is\, open}} \mu\left(O\right)$$

לכן די להראות כי $\mu\left(O\right)$ נקבע באופן יחיד על כל O פתוחה. אבל O היא איחוד זר ובן מניה של קוביות מהסוג Q שתיארנו לעיל. לכן די להראות כי $\mu\left(Q\right)$ נקבע ביחידות. ראשית, $\mu\left(Q_0\right) = 1$, ולכן אם Q מסדר 0, Q היא הזזה של Q_0, ולכן $\mu\left(Q\right) = 1$. כמו כן, Q_0 היא איחוד זה של 2^d קוביות מסדר 1, שהן הזזות אחת של השניה. לכן המידה של קוביה מסדר 1 היא $\frac{1}{2^d}$.

באופן זה ממשיכים ורואים שהמידה של קוביה מסדר n נקבעת באופן יחיד להיות

$$\frac{1}{2^{nd}}$$

■

מסקנה 2.6 קיימת לכל היותר מידת בורל אחת μ על $\mathbb{R}^d$ שהינה אינווריאנטית להזזות עבורה

$$\mu\left(\left[0,1\right]^d\right) = 1$$

הוכחה: ברורה כי מידה זו שונה מאפס, וסופית על קבוצות בורל חסומות. לכן היא נקבעת באופן יחיד עד כדי כפל בסקלר חיופי, ולבסוף נקבעת באופן יחיד לפי הדרישה למידת התיבה. בהמשך נראה שהיא קיימת. ■

הגדרה 2.7 מידה זו נקראת <u>מידת בורל-לבג</u> על $\mathbb{R}^d$. היא כמובן רגולרית. ההשלמה שלה גם כן רגולרית, ונקראת <u>מידת לבג</u> על $\mathbb{R}^d$.

הערה 2.8 השלמה של מידה אינווריאנטית להזזות היא אינווריאנטית להזזות. בפרט, מידת לבג היא אינווריאנטית להזזות.

הערה 2.9 תהי μ מידת בורל על $\mathbb{R}^d$ שסופית על קבוצות בורל חסומות. אזי μ אינווריאנטית להזזות אם ורק אם לכל קוביה Q מהסוג שתואר לעיל ולכל $v \in \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$\mu\left(Q+v\right)=\mu\left(Q\right)$$

הוכחה: ברור שהתנאי הכרחי. אם הוא מתקיים, נובע כי לכל O פתוחה מקיים $\mu\left(O+v\right)=\mu\left(O\right)$, ומרגולריות μ נובע כי היא אינווריאנטית להזזות. ■

הערה 2.10 יהי $\left(\mathbb{R}^d,\Sigma,\mu\right)$ מרחב מידה עם מידה μ אינווריאנטית להזזות. יהי $v \in \mathbb{R}^d$.

1. עבור $f:\mathbb{R}^d\to[0,\infty]$, f מדידה אם ורק אם הפונקציה $x\to f\left(x+v\right)$ מדידה, ובמקרה זה

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f\left(x\right)\,\mathrm{d}\mu\left(x\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^d} f\left(x+v\right)\,\mathrm{d}\mu\left(x\right)$$

2. עבור $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$, f אינטגרבילית אם ורק אם הפונקציה $x\to f\left(x+v\right)$ אינטגרבילית, ובמקרה זה

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f\left(x\right)\,\mathrm{d}\mu\left(x\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^d} f\left(x+v\right)\,\mathrm{d}\mu\left(x\right)$$

הוכחה: ■

1. מתחילים עם $f=\chi_A$, עבור $A\in\Sigma$, עוברים לפונקציות פשוטות, ועבור f כללית עובדים עם משפט ההתכנסות המונוטונית לאינטגרלים ועם הקירוב הסטנדרטי על ידי פונקציות פשוטות.
2. בעזרת Re,Im די לבדוק עבור f ממשית. בעזרת $f=f^+-f^-$, די לבדוק עבור $f\geq 0$, וזה נובע מסעיף 1.

3 הבנייה של קרתאודורי

הגדרה 3.1 תהי X קבוצה. מידה חיצונית על X היא פונקציה

$$\mu^*:2^X\to[0,\infty]$$

עבורה:

1. $\mu\left(\emptyset\right)=0$.
2. לכל $A\subseteq B\subseteq X$ מתקיים $\mu\left(A\right)\leq\mu\left(B\right)$.

3. לכל סדרה $A_1, A_2, \dots \subseteq X$ מתקיים

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*\left(A_n\right)$$

הערה 3.2 תנאי 3 מתקיים גם לאיחודים סופיים לאור תנאי 1.

הגדרה 3.3 תהי μ^* מידה חיצונית על X, ותהי $A \subseteq X$ תת קבוצה. אומרים כי A מדידה (קרתאודורי) אם לכל $E \subseteq X$ מתקיים

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

הערה 3.4 בכדי לראות כי A מדידה די לבדוק כי לכל $E \subseteq X$ מתקיים

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$$

כי אי שוויון הפוך נובע כבר מתנאי 3. בנוסף, די לבדוק עבור קבוצות ממידה סופית - אם $\mu(E) = \infty$ האי שוויון ברור.

משפט 3.5 תהי μ^* מידה חיצונית על X. נסמן את אוסף הקבוצות המדידות קרתאודורי, ונסמן

$$\mu = \mu^* \mid_{\Sigma} : \Sigma \to [0, \infty]$$

אזי Σ היא סיגמא אלגברה וכן μ היא מידה שלמה - כלומר (X, Σ, μ) מרחב מידה.

הוכחה: ראשית נראה כי Σ היא סיגמא אלגברה.

1. כמובן $\emptyset \in \Sigma$.
2. ישירות מההגדרה, נקבל $A^c \in \Sigma \iff A \in \Sigma$.
3. כעת נניח כי $A, B \in \Sigma$, ונוכיח כי $A \cup B$ מדידה. תהי $E \subseteq X$. אזי מתקיים

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) = \mu^*(E \cap B^c \cap A^c) + \mu(E \cap B^c \cap A) + \mu(E \cap B) = \\ &= \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) + \mu^*(E \cap (A \cup B))\end{aligned}$$

כל המעברים נובעים ממדידות A, B.
כעת נשים לב שאם $A_1, \dots, A_n$ מדידות וזרות אזי לכל $E \subseteq X$ מתקיים

$$\mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E \cap A_i)$$

נוכיח: A_n מדידה, ולכן צד שמאל שווה למעשה

$$\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\cap A_n\right)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\cap A_n^c\right)=\mu^*\left(E\cap A_n\right)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\right)$$

ומכאן ממשיכים באינדוקציה.
הראינו אם כן כי Σ היא אלגברה, ולכן מספיק להראות כי אם $A_1,A_2,\ldots$ כולן מדידות וזרות בזוגות אזי גם

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A$$

מדידה. לכל n טבעי הקבוצה

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

היא מדידה, ולכן לכל $E\subseteq X$ מתקיים

$$\mu^*\left(E\right)=\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{I=1}^{n}A_i\right)^c\right)+\mu^*\left(E\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\right)\geq\mu^*\left(E\cap A^c\right)+\sum_{i=1}^{n}\mu^*\left(E\cap A_i\right)$$

לכן נקבל

$$\mu^*\left(E\right)\overset{*}{\geq}\mu^*\left(E\cap A^c\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*\left(E\cap A_i\right)\geq\mu^*\left(E\cap A^c\right)+\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E\cap A_i\right)=$$
$$=\mu^*\left(E\cap A^c\right)+\mu^*\left(E\cap A\right)$$

כעת נראה כי μ מידה. בסימונים של לפני רגע,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*\left(A_i\right)\geq\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)$$

נשתמש באי שוויון $*$ שראינו לפני רגע עם $E=\bigcup A_i$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*\left(A_i\right)\geq\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\geq\mu\left(\emptyset\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*\left(A_i\right)$$

לכן נקבל כי

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*\left(A_i\right)$$

לכן ראינו כל מה שנדרש עבור מידה. נותר רק לבדוק כי היא מידה שלמה.
די לבדוק שכל קבוצה זניחה היא מדידה. תהי N זניחה. קיימת B מדידה עבורה $\mu(B) = 0$, $N \subseteq B$. לכל $E \subseteq X$ מתקיים

$$\mu^*(E \cap N) \leq \mu^*(N) \leq \mu^*(B) = 0$$

ולכן

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap N^c) + 0 = \mu^*(E \cap N^c) + \mu^*(E \cap N)$$

כלומר N מדידה. ■