פונקציות ממשיות

ארזים ©

14 בנובמבר 2016

1 קבוצות בורל

הערה 1.1 אם $Y\in B\left(X\right)$, נקבל

$$B\left(Y\right)=\left\{ E\subseteq Y\mid E\in B\left(X\right)\right\} \subseteq B\left(X\right)$$

פירוק מרחב אם X מרחב מטרי ומתקיים

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_{n}$$

כאשר כל X_{n} בורל אזי

$$B\left(X\right)=\left\{ \bigcup_{i=1}^{\infty}A_{i}\mid\forall n\ \ A_{n}\in B\left(X_{n}\right)\right\}$$

עבור $A\in B\left(X\right)$ נקח $A_{n}=A\cap X_{n}$, ונקבל

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{n}$$

הומאומורפיזם אם $f:X\to Z$ הומאומורפיזם (של מרחבים מטריים). אזי עבור $A\subseteq X$ מתקיים $f\left(A\right)\in B\left(Z\right)\iff A\in B\left(X\right)$

דוגמא עבור $X=\left[-\infty,\infty\right]$, $B\left(X\right)$ נוצרת (כסיגמא, אלגברה) על ידי כל אחד מהאוספים הבאים:

1. $\left\{ \left[-\infty,\alpha\right)\mid-\infty<\alpha<\infty\right\}$
2. $\left\{ \left[-\infty,\alpha\right]\mid-\infty<\alpha<\infty\right\}$
3. $\left\{ \left(\alpha,\infty\right]\mid-\infty<\alpha<\infty\right\}$
4. $\left\{ \left[\alpha,\infty\right]\mid-\infty<\alpha<\infty\right\}$

הוכחה: ראשית אלה הן קבוצות בורל. נבדוק את סעיף 1. תהי $O \subseteq X$ קבוצה פתוחה. אזי $O \cap \mathbb{R}$ קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}$ במטריקה הרגילה, ולכן היא איחוד בן מניה של קטעים פתוחים. לכן די לבדוק כי הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי הקבוצה בסעיף 1 מכילה את $\{\infty\},\{-\infty\},(a,b)$ לכל $-\infty < a < b < \infty$ (ואז נובע שהיא מכילה גם את $(a,\infty),(b,\infty)$). מתקיים

$$\begin{aligned}\{\infty\} &= \left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[-\infty,n)\right)^c \\ \{-\infty\} &= \left(\bigcap_{n\in\mathbb{Z}}[-\infty,n)\right)\end{aligned}$$

עבור $-\infty < a < b < \infty$, לכל $k \in \mathbb{N}$ עבורו מתקיים $a+\frac{1}{k} < b$ מתקיים

$$\begin{aligned}[a+\frac{1}{k},b) &= [-\infty,b)\backslash[-\infty,a+\frac{1}{k}) \\ (a,b) &= \bigcup_{\substack{b\in\mathbb{N}\\ a+\frac{1}{k}<b}}[a+\frac{1}{k},b)\end{aligned}$$

ולכן סעיף 1 אכן יוצר את $B(X)$. סעיף 4 הוא פשוט המשלימים של 1. כעת, סעיפים 2,3 מתקבלים מסעיפים 4,1 בהתאמה על ידי ההומיאומרפיס $f(x)=-x$. ■

הערה 1.2 אם $Y \subseteq X$ תת מרחב, $S \subseteq 2^X$ יוצר את $B(X)$, אזי $S\mid_Y$ יוצר את $B(Y)$:

$$(S\mid_Y)^* = S^*\mid_Y = B(X)\mid_Y = B(Y)$$

מסקנה 1.3 $B([0,\infty])$נוצר על ידי קבוצות מהסוג $(\alpha,\infty]$ (צמצום של סעיף 3 מהדוגמה).

מסקנה 1.4 $B(\mathbb{R})$ נוצר על ידי הקבוצות מהסוג $(-\infty,\alpha)$ (צמצום של סעיף 1 מהדוגמה) וכן על ידי קבוצות מהצורה $[\alpha,\infty)$ (צמצום של סעיף 3 מהדוגמה).

2 פונקציות מדידות

2.1 סיגמא אלגברה מושרית על ידי פונקציה

תהי $f: X \to Y$ פונקציה.

הערה 2.1

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(E^{c}\right) &= \left(f^{-1}\left(E\right)\right)^{c} \\ f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_{\lambda}\right) &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}\left(A_{\lambda}\right) \\ f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_{\lambda}\right) &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}\left(A_{\lambda}\right) \\ f^{-1}\left(A\backslash B\right) &= f^{-1}\left(A\right)\backslash f^{-1}\left(B\right) \end{aligned}$$

מסקנה 2.2

1. אם Σ_y היא סיגמא אלגברה על Y אזי

$$f^{-1}\left(\Sigma_{y}\right) \coloneqq \left\{f^{-1}\left(A\right) \mid A\in\Sigma_{y}\right\} \subseteq 2^{X}$$

היא סיגמא אלגברה על X.

2. אם Σ_x היא סיגמא אלגברה על X אזי

$$\left\{B\subseteq Y \mid f^{-1}\left(B\right)\in\Sigma_{X}\right\} \subseteq 2^{Y}$$

היא סיגמא אלגברה על Y.

2.2 פונקציות מדידות

הגדרה 2.3 יהי (X,Σ) מרחב מדיד, ויהי Y מרחב מטרי. פונקציה $f:X\to Y$ נקראת <u>מדידה</u> אם

$$A\in B\left(Y\right)\Rightarrow f^{-1}\left(A\right)\in\Sigma$$

הערה 2.4 בסימונים לעיל, יהי $S\subseteq 2^{Y}$ אוסף של תתקבוצות של Y שיוצר את $B\left(Y\right)$, אזי $f:X\to Y$ מדידה אם ורק אם לכל $E\in S$ מתקיים $f^{-1}\left(E\right)\in\Sigma$.

הוכחה: אכן, לפי מסקנה 2.2, סעיף 2, אוסף התת קבוצות $A\subseteq Y$ עבורן $f^{-1}\left(A\right)\subseteq\Sigma$ היא סיגמא אלגברה, המכילה את S לפי התנאי הנתון, ולכן מכילה את $B\left(Y\right)$. ■

בפרט:

1. $f:X\to Y$ מדידה אם ורק אם לכל $O\subseteq Y$ הקבוצה $f^{-1}\left(O\right)$ מדידה (בתוך X, כלומר $f^{-1}\left(O\right)\in\Sigma$)
2. $f:X\to[0,\infty]$ מדידה אם ורק אם $f^{-1}\left(\left(\alpha,\infty\right]\right)$ מדידה לכל $\alpha>0$.

הערה 2.5 אם $Y_1 \subseteq Y$ תת מרחב, $f : X \to Y_1$ פונקציה, אזי f מדידה אם ורק אם ההרכבה $i \circ f$, כאשר i היא השיכון של Y_1 בתוך Y, היא מדידה.

הוכחה: אכן, לכל $E \in B\left(Y\right)$ מתקיים

$$f^{-1}\left(E \cap Y_1\right) = f^{-1}\left(E\right)$$

וכאשר E עובר על פני $B\left(Y\right)$, $E \cap Y_1$ עובר על $B\left(Y_1\right)$. ■

הגדרה 2.6 אם X, Y מרחבים מטריים, $f : X \to Y$ פונקציה, f נקראת <u>מדידה בורל</u> אם f מדידה כפונקציה מהמרחב המדיד $\left(X, B\left(X\right)\right)$ למרחב המטרי Y. כלומר אם $E \in B\left(Y\right) \Rightarrow f^{-1}\left(E\right) \in B\left(X\right)$.

טענה 2.7 יהיו X, Y מרחבים מטריים, ותהי $f : X \to Y$ רציפה. אזי f מדידה בורל.

הוכחה: די לבדוק שלכל $O \subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}\left(O\right) \subseteq Y$ בורל. אבל $f^{-1}\left(O\right)$ פתוחה בתוך X (כי f רציפה) ולכן $f^{-1}\left(O\right) \in B\left(X\right)$. ■

2.2.1 הרכבת פונקציה מדידה עם פונקציה מדידה בורל

טענה 2.8 יהי $\left(X, \Sigma\right)$ מרחב מדיד, ויהי X, Y מרחבים מטריים. תהי $f : X \to Y$ מדידה, ותהי $g : Y \to Z$ מדידה (בורל). אזי $g \circ f$ מדידה.

הוכחה: לכל $A \in B\left(Z\right)$ מתקיים $g^{-1}\left(A\right) \in B\left(Y\right)$ ולכן $\left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1}\left(g^{-1}\left(A\right)\right) \in \Sigma$. ■

2.2.2 פירוק

טענה 2.9 יהי Y מרחב מטרי, ויהי $\left(X, \Sigma\right)$ מרחב מטרי. נניח כי $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, כאשר לכל n מתקיים $X_n \in \Sigma$. תהי $f : X \to Y$. אזי f מדידה אם ורק אם $f|_{X_n} : X_n \to Y$ מדידה לכל n.

הוכחה: נניח כי f מדידה. לכל $A \in B\left(Y\right)$ מתקיים

$$\left(f|_{X_n}\right)^{-1}\left(A\right) = X_n \cap f^{-1}\left(A\right) \in \Sigma|_{X_n}$$

נניח כי $f|_{X_n}$ מדידה לכל n. לכל $A \in B\left(Y\right)$ מתקיים

$$X_n \cap f^{-1}\left(A\right) \in \Sigma|_{X_n} \subseteq \Sigma$$

ולכן גם

$$f^{-1}\left(A\right) = \bigcup_n \left(X_n \cap f^{-1}\left(A\right)\right) \in \Sigma$$

■

2.2.3 מכפלה

תזכורת מרחב מטרי Y נקרא ספרבילי אם קיימת בו קבוצת בת מניה צפופה. אם Y לא ריקה, ויש בה סדרה $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, הסדרה הזו צפופה אם מתקיים $\overline{\{y_n\}_{n=1}^{\infty}} = Y$.
נסמן אוסף של כדורים:

$$\mathcal{D} = \{B_Y(y_i, r) \mid i \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Q}\}$$

אוסף זה הוא בן מניה, ומורכב מקבוצות פתוחות. כל קבוצה פתוחה היא איחוד של תת אוסף של האוסף הזה.

הערה 2.10 אם Y, Z ספרביליים, אזי $Y \times Z$ ספרבילי. אם $\overline{\{y_i\}_{i=1}^{\infty}} = Y, \overline{\{z_j\}_{j=1}^{\infty}} = Z$, אזי $\overline{\{(y_i, z_j)\}_{i,j=1}^{\infty}} = Y \times Z$.

טענה 2.11 יהי (X, Σ) מרחב מדיד, ויהי Y, Z מרחבים מטריים ספרביליים. יהיו $f : X \to Y, g : X \to Z$ פונקציות מדידה. אזי הפונקציה

$$\begin{aligned} (f,g) : X &\to Y \times Z \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

מדידה.

הוכחה: נשתמש במטריקת המקסימום על $Y \times Z$. די להוכיח, בסימוני ההערה, שלכל כדור פתוח $B = B_{Y \times Z}((y_i, z_j), r) \subseteq Y \times Z$ מתקיים $(f,g)^{-1}(B) \in \Sigma$.

$$\begin{aligned} B &= B_Y(y_i, r) \times B_Z(z_j, r) \\ (f,g)^{-1}(B) &= f^{-1}(B_Y(y_i, r)) \cap g^{-1}(B_Z(z_j, r)) \in \Sigma \end{aligned}$$

■

נוכל לקחת $X = Y \times Z$, $f = p_Y, g = p_Z$ הטלות, ואז לכל $A \subseteq Y, B \subseteq Z$ מתקיים $f^{-1}(A) = A \times Z, g^{-1}(B) = Y \times B$.
ניקח את הסיגמא אלגברה Σ על $X = Y \times Z$ שנוצרת על ידי $A \times Z, Y \times B$ עבור $A \in B(Y), B \in B(Z)$. לכן היא נוצרת על ידי קבוצות מהסוג

$$\{A \times B \mid A \in B(Y), B \in B(Z)\}$$

השאלה היא האם $\Sigma \subseteq B(Y \times Z)$ (שכן (f,g) היא הזהות). מסמנים

$$\Sigma = B(Y) \otimes B(Z)$$

וישנה השאלה

$$B(Y \times Z) \stackrel{?}{=} B(Y) \otimes B(Z)$$

2.2.4 פונקציות אל $\mathbb{C},\mathbb{R},[0,\infty],[-\infty,\infty]$

יהי (X,Σ) מרחב מדיד.

טענה 2.12 אם $f:X\to[-\infty,\infty],g:X\to[-\infty,\infty]$ מדידות, אזי המכפלה $f\cdot g:X\to[-\infty,\infty]$ מדידה.

הוכחה: $f\cdot g$ היא ההרכבה של (f,g) עם הפונקציה $(x,y)\to x\cdot y$, והפונקציה (f,g) מדידה. נותר לבדוק שפונקציית המכפלה היא מדידה. ניתן לראות זאת על ידי פירוק התחום להיות

$$\{\{-\infty\},(-\infty,0),\{0\},(0,\infty),\{\infty\}\}^2\to[-\infty,\infty]$$

כל קבוצה מהצורה $A\times B$ מהתחום הזה היא מדידה בתוך $[-\infty,\infty]\times[-\infty,\infty]$. ואז למשל פונקציית הכפלה מהתחום $(-\infty,0)\times(0,\infty)$ היא רציפה. כמו כן, למשל, מהתחום $(-\infty,0)\times\{\infty\}$ היא קבועה, ולכן רציפה. כך ניתן להמשיך. ■

טענה 2.13 באותם סימונים כמו בטענה הקודמת, נסמן $A=\{x\in X\mid f(x)+g(x)\in[-\infty,\infty]\}$, כלומר כל הנקודות שחיבור ערכי f,g שלהן מוגדר. אזי A מדידה, וכן

$$f+g\mid_A:A\to[-\infty,\infty]$$

היא מדידה. אם למשל נגדיר $f+g=0$ לכל $x\notin A$ נקבל כי $f+g$ מדידה ומוגדרת על כל X.

ההוכחה דומה לקודמת.

תהי $f:X\to\mathbb{C}$. ראשית ברור כי f מדידה אם ורק אם $\mathrm{Re}f,\mathrm{Im}f$ מדידות. לכן אם $f,g:X\to\mathbb{C}$ מדידות, אזי $f\cdot g,f+g:X\to\mathbb{C}$.

באופן דומה, אם $f:X\to\mathbb{C}$ מדידה, אזי $A=f^{-1}(0)\subseteq X$ מדידה, ולכן $\frac{1}{f}:A^c\to\mathbb{C}$ מדידה. אם נגדיר אותה להיות 0 בתוך A, נקבל פונקציה מדידה מכל X אל $\mathbb{C}$.

לבסוף, קיימת פונקציה מוגדרת היטב $\arg:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to[0,2\pi)$. נרחיב אותה על כל $\mathbb{C}$ על ידי קביעה למשל שהארגומנט של 0 הוא 0. אז נקבל כי $\arg$פונקציה מדידה על $\mathbb{C}$ (על ידי הפירוק

$$\mathbb{C}=\{0\}\cup(0,\infty)\cup(C\setminus[0,\infty))$$

מסקנה 2.14 אם $f:X\to\mathbb{C}$ מדידה, אזי $\arg f:X\to[0,2\pi)$ מדידה, וכן $|f|=\sqrt{(\mathrm{Re}f)^2+(\mathrm{Im}f)^2}$ מדידה. כמובן מתקיים

$$f=e^{i\cdot\arg f}\cdot|f|$$

2.3 אינפימום וסופרימום

יהי (X,Σ) מרחב מדיד. ראינו כי פונקציה $f:X\to[-\infty,\infty]$ מדידה אם ורק אם $f^{-1}\left((\alpha,\infty]\right)$ מדידה עבור $-\infty<\alpha<\infty$.

מסקנה 2.15 תהיינה $f_n:X\to[-\infty,\infty]$ סדרת פונקציות בת מניה. אזי

$$\sup_n f_n : x\to[-\infty,\infty]$$

מדידה, שכן

$$\left(\sup_n f_n\right)^{-1}\left((\alpha,\infty]\right)=\bigcup_n f_n^{-1}\left((\alpha,\infty]\right)$$

כאן מסמנים

$$\left(\sup_n f_n\right)(x)=\sup_n\left(f_n\left(x\right)\right)$$

מאחר וכפל בקבוע -1 הוא הומיאמורפיזם של $[-\infty,\infty]$, נובע שגם

$$\inf_n f_n=-\sup_n\left(-f_n\right)$$

מדידה גם כן, ולכן גם

$$\liminf_{n\to\infty} f_n,\limsup_{n\to\infty} f_n$$

מדידות. בפרט, אם $\varphi_n:X\to[0,\infty]$ מדידות לכל n טבעי, גם $\sum\varphi_n:X\to[0,\infty]$ מדידה (כי הסכומים הסופיים מדידים, וסכום הטור הוא גבול שלהם).

כעת, באופן כללי, אם $g,h:X\to[-\infty,\infty]$ מדידות, אזי $(g,h):x\to[-\infty,\infty]\times[-\infty,\infty]$ מדידה. נסמן את האלכסון

$$\Delta=\{(x,x)\mid-\infty\leq x\leq\infty\}\subseteq[-\infty,\infty]\times[-\infty,\infty]$$

אזי Δ סגורה במכפלה, ולכן

$$(g,h)^{-1}\left(\Delta\right)=\{x\in X\mid g\left(x\right)=h\left(x\right)\}$$

מדידה.

מסקנה 2.16 אם $f_n : (X,\Sigma) \to [-\infty,\infty]$ מדידות, אזי הקבוצה

$$L = \left\{ x \in X \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \right\}$$

מדידה, וכן הפונקציה

$$\lim_{n\to\infty} f_n : L \to \infty$$

מדידה. באופן דומה,

$$L' = \left\{ x \in L \mid \left| \lim_{n\to\infty} f_n(x) \right| < \infty \right\}$$

מדידה, והצמצום של פונקציית הגבול על L' מדיד גם כן.

3 הגדרת מידה

3.1 הגדרה

הגדרה 3.1 יהי (X,Σ) מרחב מדיד. מידה על (X,Σ) היא פונקציה $\mu : \Sigma \to [0,\infty]$ כך שמתקיים:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. אם $A_i \in \Sigma$ זרות בזוגות, אזי

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

השלישייה (X,Σ,μ) נקראת מרחב מידה.

מינוחים לגבי סופיות

1. אם $\mu(X) = 1$, μ נקראת מידת הסתברות.
2. אם $\mu(X) < \infty$, μ נקראת מידה סופית.
3. אם קיים איחוד בן מנייה $X = \bigcup X_n$, כאשר $X_n \in \Sigma$ וכן לכל n מתקיים $\mu(X_n) < \infty$, אזי μ נקראת σ־סופית.

דוגמא תהי X קבוצה, $\Sigma = 2^X$. נגדיר את המידה הסופרת על X:

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & |A| < \infty \\ \infty & otherwise \end{cases}$$

3.2 יחסים ופעולות על מידות

1. אם (X,Σ,μ) מרחב מידה, $\Sigma' \subseteq \Sigma$ תת סיגמא אלגברה, אזי $(X,\Sigma',\mu\mid_{\Sigma'})$ גם מרחב מידה.

2. אם μ מידה על X, $0 \le a \le \infty$, אזי הפונקציה

$$\begin{aligned} a\mu:\Sigma &\to [0,\infty] \\ A &\mapsto a\mu(A) \end{aligned}$$

היא מידה.

3. אם μ,μ' מידות על (X,Σ) כל שלכל $A\in\Sigma$ מתקיים $\mu(A)\le\mu'(A)$, כותבים $\mu\le\mu'$.

4. תהיינה $\mu_1 \le \mu_2 \le \ldots$ מדיות על (X,Σ). הפונקציה

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n = \sup_n \mu_n : \Sigma \to [0,\infty]$$

היא מידה. נראה זאת. לגבי הקבוצה הריקה זה ברור. אם $A_1,A_2,\cdots\in\Sigma$ זרות בזוגות, אזי

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n(A_i)\right) \overset{*}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\mu_n(A_i)$$

נצדיק את *: ראשית אם $a_n,b_n\in[0,\infty]$ סדרות אי שליליות, וקיימים הגבולות

$$\lim_{n\to\infty}a_n,\ \lim_{n\to\infty}b_n$$

אזי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}a_n + \lim_{n\to\infty}b_n$$

כעת, אי שוויון אחד של * נובע מכך לכל n מתקיים

$$\mu_n(A_i) \le \sup_n \mu_n(A_i) = \lim_{n\to\infty}\mu_n(A_i)$$

ולכן לכל n מתקיים

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty}\mu_n(A_i) &\le \sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\mu_n(A_i) \\ \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n(A_i) &\le \sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\mu_n(A_i) \end{aligned}$$

בכיוון ההפוך, אי השוויון נובע מכך שלכל s סופי מתקיים

$$\sum_{i=1}^{s}\lim_{n\to\infty}\mu_n\left(A_i\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{s}\mu_n\left(A_i\right)\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n\left(A\right)$$

ולכן כאשר $s\to\infty$ נקבל

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\mu_n\left(A_i\right)\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n\left(A_i\right)$$

3.3 תכונות ראשונות של מידות

1. אם $A_1,\ldots,A_n\in\Sigma$ זרים בזוגות אזי

$$\mu\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu\left(A_i\right)$$

שכן נציב את כל שאר הקבוצות בסדרה בת מניה להיות ריקות.

2. אם $A\subseteq B$ אזי

$$\mu\left(A\right)\leq\mu\left(B\right)$$

שכן $\mu\left(B\right)=\mu\left(A\right)+\mu\left(B\backslash A\right)$.

3. אם $A_1,A_2,\ldots$ מדידות אזי

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n\right)$$

אכן:

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) &= \mu\left(A_1\cup\left(A_2\backslash A_1\right)\cup\left(A_3\backslash\left(A_2\cup A_1\right)\right)\cup\ldots\right)= \\ &= \mu\left(A_1\right)+\mu\left(A_2\backslash A_1\right)+\mu\left(A_3\backslash\left(A_2\cup A_1\right)\right)+\cdots\leq \\ &\leq \mu\left(A_1\right)+\mu\left(A_2\right)+\mu\left(A_3\right)+\ldots\end{aligned}$$

4. אם $A_1\subseteq A_2\subseteq A_3\subseteq\ldots$ מדידות, אזי

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)$$

אכן נציב $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \backslash A_1$, וכן הלאה:

$$B_n = A_n \backslash A_{n-1}$$

ואז

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_n A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(B_i\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu\left(B_i\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right)\end{aligned}$$

5. אם $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ מדידות וכן קיים n_0 כך שעבורו $\mu\left(A_{n_0}\right) < \infty$, מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

אפשר לזרוק כל מה שלפני n_0 - לא משנה לחיתוך או למידה.