פונקציות ממשיות

© ארזים

30 באוקטובר 2016

1 סימונים

הגדרה 1.1 נאמר שקבוצה A היא בת מניה אם קיימת פונקציה חד־חד־ערכית $f: A \to \mathbb{N}$.
בפרט, אם A סופית (או ריקה ־ בפרט סופית), אזי A בת מניה.

הגדרה 1.2 מערכת המספרים הממשיים המורחבת היא $\mathbb{R}$ בתוספת שני סימונים: $+\infty = \infty$, $-\infty$.

1.1 הגדרות ישנות

יחס סדר: לכל a במערכת המורחבת, $-\infty \leq a \leq \infty$.
סימוני קטעים: כל המערכת ־ $[-\infty, \infty]$, קטע ־ $[a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$, $a, x, b \in [-\infty, \infty]$.
אינפימום וסופרימום: לכל תת קבוצה $\emptyset \neq A \subseteq [-\infty, \infty]$ קיימים איברים יחידים $\inf A, \sup A \in [-\infty, \infty]$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $\inf A \leq x \leq \sup A$, וכן $\sup A$ $(\inf A)$ הוא המספר המורחב הקטן (הגדול) ביותר עם תכונה זו.
אם $\sup A \in A$, נסמנו $\max A$. אם $\inf A \in A$, נסמנו $\min A$.
גבול עליון וגבול תחתון: עבור $a_1, a_2, \dots \in [-\infty, \infty]$ סדרה, נגדיר

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{k\geq 1}\left(\sup_{m\geq k} a_n\right) \in [-\infty, \infty]$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{k\geq 1}\left(\inf_{m\geq k} a_n\right) \in [-\infty, \infty]$$

אם שני אלה שווים, נסמן את הערך המשותף בתור

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

1.1.1 פעולות

- כפל: עבור $a, b \in [-\infty, \infty]$ נגדיר $ab \in [-\infty, \infty]$ באופן הבא:
  - אם $a, b \in \mathbb{R}$ כרגיל.
  - לכל $x \in [-\infty, \infty]$, $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.

- אם $a\in(0,\infty]$ אזי $a\cdot\infty=\infty=\infty\cdot a$, $a\cdot(-\infty)=-\infty=(-\infty)\cdot a$
- אם $b\in[-\infty,0)$ אזי $b\cdot\infty=-\infty=\infty\cdot b$, $b\cdot(-\infty)=\infty=(-\infty)\cdot b$

• חיבור: עבור $a,b\in[-\infty,\infty]$ נגדיר $a+b\in[-\infty,\infty]$ באופן הבא:
  - אם $a,b\in\mathbb{R}$ כרגיל.
  - אם $a\neq-\infty$ אז $a+\infty=\infty=\infty+a$
  - אם $b\neq\infty$ אז $b+(-\infty)=b-\infty=-\infty=-\infty+b$
  - הביטויים הבאים לא מוגדרים: $\infty+(-\infty), -\infty+\infty, \infty-\infty, (-\infty)-(-\infty)$.

הערה 1.3 על $[0,\infty]$מתקיים $a(b+c)=ab+ac$.

1.1.2 סכומים אי שליליים (אינסופיים בעיקר)

תהי I קבוצת אינדקסים, ויהיו נתונים איברים $a_i\in[0,\infty]$ לכל $i\in I$. נסמן:

$$\sum_{i\in I}a_i=\sup_{\substack{S\subseteq I\\ |S|\in\mathbb{N}}}\left\{\sum_{i\in S}a_i\right\}\in[0,\infty]$$

תכונות:

1. אם $I=\biguplus_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$ איחוד זר, אזי

$$\sum_{i\in I}a_i=\sum_{\lambda\in\Lambda}\left(\sum_{i\in I_\lambda}a_i\right)$$

2. אם נתונים $a_1,a_2,\ldots$ מתוך $(0,\infty)$, אזי

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_i=\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n\in[0,\infty]$$

כאשר הסכום השמאלי הוא במובן שאנחנו מכירים מחדו"א 1.

3. אם קיים $i\in I$ כך שמתקיים $a_i=\infty$ אז $\sum_{i\in I}a_i=\infty$.
4. אם $\sum_{i\in I}a_i<\infty$, אזי $a_i\neq0$ רק עבור קבוצה בת מניה של אינדקסים i.

2 מרחבים מטריים

2.1 מרחב מטרי

הגדרה 2.1 <u>מרחב מטרי</u> הוא זוג (X,d), כאשר X קבוצה, d פונקציה,

$$d:X\times X\to[0,\infty)$$

כאשר $d(x,y)$ הוא המרחק בין x,y. d צריכה לקיים:

1. $d\left(x,y\right)=0 \iff x=y$
2. $d\left(x,y\right)=d\left(y,x\right)$
3. $d\left(x,z\right)\leq d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right)$

הערה 2.2 אומרים גם כי d מטריקה על X. תיתכנה מטריקות שונות על אותה קבוצה X. לעיתים כותבים X במקום $\left(X,d\right)$ אם המטריקה d ברורה.

הערה 2.3 נובע כי לכל $x,y,z\in X$

$$\left|d\left(x,z\right)-d\left(y,z\right)\right|\leq d\left(x,y\right)$$

משום שמתכונה 3 נובע כי

$$d\left(x,z\right)-d\left(y,z\right)\leq d\left(x,y\right)$$

ועל ידי החלפת x עם y:

$$d\left(y,z\right)-d\left(x,z\right)\leq d\left(y,x\right)=d\left(x,y\right)$$

הגדרה 2.4 אם $X_1\subseteq X$ תת קבוצה אזי $X_1\times X_1\subseteq X\times X$, וצמצום d על $X_1\times X_1$, כלומר הפונקציה

$$d_1:=d\mid_{X_1\times X_1}:X_1\times X_1\to[0,\infty)$$

היא מטריקה על X_1, הנקראת המטריקה המושרית על X_1.

הערה 2.5 כדור פתוח שמכרזו x ורדיוסו r הוא

$$B\left(x,r\right)=\left\{ y\in X\mid d\left(x,y\right)\leq r\right\}$$

2.2 גבולות

הגדרה 2.6 יהי $\left(X,d\right)$ מרחב מטרי, ותהי $\left\{ x_n\right\}_{n=1}^{\infty}\subseteq X$ סדרה, ויהי $x\in X$. אומרים שהסדרה $\left\{ x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול x, או שגבול הסדרה הוא x, אם

$$\lim_{n\to\infty}d\left(x_n,x\right)=0$$

כאשר זהו גבול במובן של חדו"א 1.
כותבים גם

$$x_n\to x,x_n\xrightarrow{n\to\infty}x$$

הערה 2.7 תת סדרות: אם $x_n \to x$, ותהי $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה (כלומר $1 \le n_1 \le n_2 \le \ldots$), אזי $x_{n_k} \to x$.

הערה 2.8 אם קיים גבול אז הוא יחיד. אכן, אן $x_n \to x, x_n \to x'$, אזי

$$0 \le d(x,x') \le d(x,x_n) + d(x_n,x') \to 0+0=0$$

ולכן מכלל הסנדוויץ', $d(x,x')=0$, כלומר $x=x'$.

הערה 2.9 אם $x_n \to x$, $d(x_n,y_n) \to 0$, אזי $y_n \to x$, שכן

$$d(y_n,x) \le d(y_n,x_n) + d(x_n,x) \to 0+0=0$$

2.3 קבוצות סגורות

יהי (X,d) מרחב מטרי.

הגדרה 2.10 $A \subseteq X$ נקראת סגורה אם לכל $A \supseteq \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to x$, מתקיים $x \in A$. כלומר, A מכילה את כל הגבולות של סדרות מתוכה שמתכנסות לאיבר כלשהו מתוך X.

תכונות:

1. הקבוצות $X,\emptyset$ הן סגורות.
2. חיתוך משפחה של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה (מיידי).
3. איחוד מספר סופי של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה:
אכן, מספיק לבדוק שאם A,B סגורות אזי $A\cup B$ סגורה. נניח כי $A\cup B \ni x_n \to x$. אזי קיימת תת סדרה $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ כך שלכל k, $x_{n_k} \in A$. כמו כן, יש תת סדרה $\{x_{n_l}\}_{l=1}^{\infty}$ כך שלכל l, $x_{n_l} \in B$. במקרה הראשון, $x \in A \subseteq A \cup B$, ובשני $x \in B \subseteq A \cup B$.

הגדרה 2.11 תהי $A \subseteq X$. נסמן את הסגור של A בתור

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A \;\; x_n \to x\}$$

תכונות:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$
2. $A \subseteq \overline{A}$ (לכל $a \in A$ נקח סדרה קבועה $a_n = a$)

3. $\overline{A}$ קבוצה סגורה: נניח כי $\overline{A} \ni x^{(i)} \to x$. נרצה להראות כי $x \in \overline{A}$. לכל j קיים $A \ni x_n^{(j)} \xrightarrow{n\to\infty} x^{(j)}$. לכן יש $n(j)$ כך שמתקיים $d\left(x_{n(j)}^{(j)}, x^{(j)}\right) < \frac{1}{j}$, ובפרט

$$\lim_{j\to\infty} d\left(x_{n(j)}^{(j)}, x^{(j)}\right) = 0$$

אבל $x^{(j)} \to x$, ולכן $A \ni x_{n(j)}^{(j)} \to x$, כלומר $x \in \overline{A}$.

מסקנה 2.12 $\overline{A}$ היא הקבוצה הסגורה הקטנה ביותר המכילה את A (כי אם F סגורה וכן $A \subseteq F$ אזי $\overline{A} \subseteq F$).

הגדרה 2.13 אם $\overline{A} = X$ אומרים שהקבוצה A צפופה בתוך X.

הגדרה 2.14 אם קיימת קבוצה בת מניה וצפופה בתוך X, אומרים כי X ספרבילי. במילים אחרות, קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך שמתקיים $X = \overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$.

הערה 2.15 גם $X = \emptyset$ ספרבילי.

2.4 רציפות

הגדרה 2.16 יהיו X, Y מרחבים מטריים, ותהי $f : X \to Y$ פונקציה.

1. יהי $x \in X$. אומרים כי f <u>רציפה</u> בנקודה x אם

$$X \ni x_n \to x \in X \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$$

2. אומרים כי f רציפה אם f רציפה בכל נקודה $x \in X$.

הרכבה: תהי בנוסף $g : Y \to Z$ כאשר Z מרחב מטרי. אם f רציפה על x וכן g רציפה על $f(x)$, אזי $g \circ f$ רציפה.

הגדרה 2.17 אם $f : X \to Y$ רציפה, חד־חד־ערכית ועל, וכן $f^{-1} : Y \to X$ רציפה, אזי f נקראת <u>הומאומורפיזם</u> (גם f^{-1} הומאומורפיזם).

הגדרה 2.18 אם מתקיים לכל $x_1, x_2 \in X$

$$d_x(x_1, x_2) = d_y(f(x_1), f(x_2))$$

אומרים כי f <u>איזומטריה</u> (כאן d_x היא המטריקה על X, d_y היא המטריקה על Y).
במקרה זה f רציפה וחד־חד־ערכית. אם f על, אז f הומאומורפיזם (ואז גם f^{-1} איזומטריה).

2.5 קבוצות פתוחות

יהי (X, d) מרחב מטרי.

הגדרה 2.19 תת קבוצה $A \subseteq X$ נקראת פתוחה אם לכל $x \in A$ קיים $\varepsilon > 0$ עם $B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

טענה 2.20 הקשר לקבוצות סגורות: $A \subseteq X$ פתוחה $\iff X \backslash A$ סגורה.

הוכחה: נסמן $F = X \backslash A$. נניח כי F לא סגורה. אז יש $F \ni x_n \to x \in A$. לכן $d(x_n, x) \to 0$ וכן $x_n \notin A$ לכל n. לכן A לא פתוחה.
נניח כי A לא פתוחה. אזי יש $x \in A$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $B\left(x, \frac{1}{n}\right) \not\subseteq A$, כלומר יש $x_n \in F \cap B\left(x, \frac{1}{n}\right)$. מכאן $F \ni x_n \to x \in A$, ולכן F לא סגורה. ■

מסקנה 2.21 תכונות של קבוצות פתוחות:

1. $\emptyset, X$ פתוחות.
2. איחוד משפחה כלשהי של קבוצות פתוחות היא קבוצה פתוחה.
3. חיתוך כמות סופית של קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה.

הגדרה 2.22 יהי (X, d) מרחב מטרי. אוסף הקבוצות הפתוחות בתוך X נקרא <u>הטופולוגיה</u> המוגדרת על ידי (X, d), ומסומן T_x או $T_{(X,d)}$.

הערה 2.23 כדור פתוח $B(x, r)$ הוא תמיד קבוצה פתוחה, שכן אם $y \in B(x, r)$ אזי $d(x, y) < r$, ואז $B(y, r - d(x, y)) \subseteq B(x, r)$.

הערה 2.24 מושג הגבול $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ במרחב מטרי X תלוי רק בטופולוגיה, כי $x_n \to x$ אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה $A \ni x$ קיים N כך שעבור $n \geq N$ מתקיים $x_n \in A$.

תתי מרחב וקבוצות פתוחות

טענה 2.25 יהי (X, d)מרחב מטרי, $Y \subseteq X$ תת מרחב (הופך למרחב מטרי עם המטריקה המושרית). תהי $B \subseteq Y$. אזי B פתוחה בתוך Y אם ורק אם קיימת $A \subseteq X$ פתוחה כך שמתקיים $B = A \cap Y$. במילים: הקבוצות הפתוחות של Y הן החיתוכים של כל הקבוצות הפתוחות של X עם Y.

הוכחה: נניח כי קיימת A כזו. יהי $y \in B$, אזי $y \in A$, ולכן יש $\varepsilon > 0$ כך שמתקיים $B_X(y, \varepsilon) \subseteq A$. אבל $B_Y(y, \varepsilon) = Y \cap B_X(y, \varepsilon)$, ולכן $B_Y(y, \varepsilon) \subseteq Y \cap A = B$.
בכיוון השני, נניח כי B פתוחה. כלומר, לכל y קיים $\varepsilon_y > 0$ המקיים

$$B_Y(y, \varepsilon_y) \subseteq B$$

אזי $B_X(y, \varepsilon_y)$ מקיים

$$y \in B_X(y, \varepsilon_y), B_X(y, \varepsilon_y) \cap y = B_y(y, \varepsilon_y) \subseteq B$$

נקח

$$A=\bigcup_{y\in B} B_X\left(y,\varepsilon_y\right)$$

אזי $B\subseteq A$, ולכן $A\cap Y\subseteq B$, ולכן $A\cap Y=B$. ■

ספרביליות

טענה 2.26 יהי X ספרבילי, ונניח כי $X=\overline{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$. נסתכל על האוסף הבא של כדורים פתוחים

$$\left\{B\left(x_i,r\right)\mid i\in\mathbb{N},0<r\in\mathbb{Q}\right\}$$

זהו אוסף בן מניה של כדורים פתוחים, וכל קבוצה פתוחה של X היא איחוד של כדורים מאוסף זה. **הוכחה:** תהי $O\subseteq X$ קבוצה פתוחה. יהי $x\in O$. אזי יש $\delta>0$ המקיים $B\left(x,\delta\right)\subseteq O$. קיים $x_i\in B\left(x,\frac{\delta}{3}\right)$. ניקח r רציונאלי המקיים $\frac{\delta}{3}<r<\frac{2\delta}{3}$. אזי

$$x\in B\left(x_i,\frac{\delta}{3}\right)\subseteq B\left(x_i,r\right)\subseteq B\left(x,\delta\right)\subseteq O$$

לכן לכל $x\in O$ יש כדור מהאוסף לעיל שמכיל אותו ונמצא כולו בתוך O. ■

2.6 הממשיים

על $\mathbb{R}=\left(-\infty,\infty\right)$ ניקח את המטריקה הרגילה: $d\left(x,y\right)=\left|x-y\right|$.

טענה 2.27 תהי $O\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה פתוחה. אזי קיים איחוד זר יחיד

$$O=\biguplus_{\lambda\in\Lambda}\left(a_\lambda,b_\lambda\right)$$

כאשר Λ בת מניה ולכל λ מתקיים $-\infty\leq a_\lambda<b_\lambda\leq\infty$, וכן $\left\{\left(a_\lambda,b_\lambda\right)\mid,\lambda\in\Lambda\right\}$ הוא בדיוק אוס, הקטעים המקסימליים הנמצאים בתוך O.

הוכחה: יחידות: אם $\lambda\in\Lambda$ אזי $b_\lambda\notin O$ (כי אחרת יש $\lambda_1\in\Lambda$ עם $b_\lambda\in\left(a_{\lambda_1},b_{\lambda_1}\right)$ ואז$\lambda\neq\lambda_1$, אבל הקטעים $\left(a_{\lambda_1},b_{\lambda_1}\right),\left(a_\lambda,b_\lambda\right)$ אינם זרים). לכן גם $a_\lambda\notin O$, ולכן הקטע $\left(a_y,b_y\right)$ הוא מקסימלי בתוך O.

בכיוון ההפוך, יהי $I\subseteq O$ קטע מקסימלי. מאחר שהקבוצה O פתוחה, I קטע פתוח, כלומר $I=\left(a,b\right)$. קיים $\lambda\in\Lambda$ המקיים $\left(a,b\right)\cap\left(a_\lambda,b_\lambda\right)\neq\emptyset$. נשים לב כי $a_\lambda,b_\lambda\notin O$ (אחרת האיחוד אינו זר). לכן נובע כי $a_\lambda,b_\lambda\notin\left(a,b\right)$.

מכאן נובע כי $\left(a,b\right)\subseteq\left(a_\lambda,b_\lambda\right)$, וממקסימליות נקבל $\left(a,b\right)=\left(a_\lambda,b_\lambda\right)$. הוכחנו כי בהינתן איחוד זר כזה, הוא בהכרח מורכב מהקטעים הפתוחים המקסימליים - לכן הוא יחיד.

קיום: יהי $x \in O$. קיים $\varepsilon > 0$ המקיים

$$B_{\mathbb{R}}\left(x,\varepsilon\right) = \left(x-\varepsilon, x+\varepsilon\right) \subseteq O$$

יהיו

$$a = \inf\left\{t \mid (t,x) \subseteq O\right\}, b = \sup\left\{t \mid (x,t) \subseteq O\right\}$$

אזי $x \in (a,b) \subseteq O$.
אם a (בהתאמה b) סופי אזי $a \notin O$ (בהתאמה $b \notin O$). לכן (a,b) קטע מקסימלי בתוך O. נסמן $\left\{(a_\lambda, b_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\right\}$ את אוסף הקטעים המקסימליים בתוך O (הם פתוחים ־ ראינו ־ וזרים בזוגות ־ מיידי). כעת

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \left(a_\lambda, b_\lambda\right) = O$$

לבסוף, לכל $\lambda \in \Lambda$ יש מספר רציונלי $r_\lambda \in O \cap (a_\lambda, b_\lambda)$, ולכן יש העתקה חד־חד־ערכית

$$\begin{aligned} r : \Lambda &\to Q \\ r\left(\lambda\right) &= r_\lambda \end{aligned}$$

ולכן Λ קבוצה בת מנייה. ∎

2.7 סביבות

יהי (X,d) מרחב מטרי.

הגדרה 2.28 יהי $x \in X$, ותהי $x \in A \subseteq X$. התנאים הבאים שקולים (מיידי):

1. קיימת קבוצה פתוחה $O \subseteq X$ כך שמתקיים $x \in O \subseteq A$
2. קיים $\varepsilon > 0$ כך שמתקיים $B\left(x,\varepsilon\right) \subseteq A$

במקרה זה אומרים כי A סביבה של x.

מסקנה 2.29 $A \subseteq X$ קבוצה פתוחה אם ורק אם A סביבה של כל נקודה שלה.

הערה 2.30 מהתנאי הראשון נובע שאוסף הסביבות של x תלוי רק בטופולוגיה של X.

יש לשים לב כי סביבה של A לא חייבת להיות פתוחה.

הגדרה 2.31 סביבה פתוחה A של x היא קבוצה פתוחה שהיא סביבה של x, כלומר קבוצה פתוחה A המכילה את x.

2.8 רציפות, סביבות, קבוצות פתוחות

טענה 2.32 יהיו X,Y מרחבים מטריים ותהי $f:X\to Y$ פונקציה.

1. עבור $x\in X$ התנאים הבאים שקולים:
   (א) f רציפה בנקודה x.
   (ב) לכל $\delta>0$ קיים $\varepsilon>0$ כך שמתקיים $f\left(B\left(x,\varepsilon\right)\right)\subseteq B\left(f\left(x\right),\delta\right)$, או באופן שקול $B\left(x,\varepsilon\right)\subseteq f^{-1}\left(B\left(f\left(x\right),\delta\right)\right)$.
   (ג) לכל סביבה $O\subseteq Y$ של $f\left(x\right)$, $f^{-1}\left(O\right)$ היא סביבה של x.
2. התנאים הבאים שקולים:
   (א) f רציפה.
   (ב) לכל $A\subseteq Y$ פתוחה, $f^{-1}\left(A\right)\subseteq X$ פתוחה.
   (ג) לכל $A\subseteq Y$ סגורה, $f^{-1}\left(A\right)\subseteq X$ סגורה.

מסקנה 2.33 רציפות $f:X\to Y$ תלויה רק בטופולוגיות של X ושל Y (שמוגדרות על ידי המטריקות).

מסקנה 2.34 תהיינה d,d' שתי מטריקות על X. אזי העתקת הזהות $id_X:\left(X,d\right)\to\left(X,d'\right)$ היא הומאומורפיזם אם ורק אם הקבוצות הפתוחות של X ביחס למטריקות d,d' זהות, כלומר אם ורק אם הטופולוגיה של $\left(X,d\right)$ זהה לזו של $\left(X,d'\right)$.

2.9 מכפלות

הגדרה 2.35 יהיו $\left(X_i,d_i\right)$ מרחבים מטריים עבור $i\in\{1,\ldots,n\}$. נסמן:

$$X=\prod_{i=1}^{n}X_i=\left\{\left(x_1,\ldots,x_n\right)\mid x_i\in X_i\forall 1\leq i\leq n\right\}$$

נגדיר מטריקה על x על ידי

$$d_{\infty}\left(\left(x_i\right)_{i=1}^{n},\left(y_i\right)_{i=1}^{n}\right)=\max_{1\leq i\leq n}d_i\left(x_i,y_i\right)$$