פונקציות ממשיות

ארזים ©

29 בינואר 2017

1 השתנות של פונקציה

הגדרה 1.1 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה. מסמנים את ההשתנות של f על $[a,b]$ להיות

$$V_a^b=V_a^b\left(f\right)=\sup\left\{\sum_{i=1}^{k}\left|f\left(x_i\right)-f\left(x_{i-1}\right)\right|a=x_0\leq x_1\leq\cdots\leq x_k=b\right\}\in[0,\infty]$$

תכונות

1. אם מוסיפים נקודת חלוקה הסכום אינו קטן. לכן אפשר להתייחס בסופרימום לחלוקות המכילות נקודות קבועות מראש.

2. בפרט, אם $a\leq c\leq b$ אזי על ידי התייחסות לחלוקות המכילות את c נקבל

$$V_a^b\left(f\right)=V_a^c\left(f\right)+V_c^b\left(f\right)$$

3. מתקבלת פונקציית ההשתנות

$$[a,b]:[0,\infty):x\to V_a^x\left(f\right)$$

פונקציה זו מונוטונית עולה, שכן אם $a\leq x\leq y\leq b$ אזי

$$V_a^y=V_a^x+V_x^y\geq V_a^x$$

4. אם ניקח $x_0=a,x_1=b$ נקבל

$$V_a^b\left(f\right)\geq\left|f\left(b\right)-f\left(a\right)\right|$$

5. מתקיימים הדברים הבאים:

$$V_a^b(f+g) \le V_a^b(f) + V_a^b(g)$$
$$V_a^b(\lambda f) = |\lambda| V_a^b(f)$$

6. אומרים כי f בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$ אם $V_a^b(f) < \infty$. במקרה זה, לכל $x \in [a,b]$ מתקיים $V_a^x(f) < \infty$.

7. אם f, g הן בעלות השתנות חסומה על $[a,b]$ אזי

$$\left|V_a^b(f) - V_a^b(g)\right| \le V_a^b(f-g) < \infty$$

וזאת משום שמתקיים

$$V_a^b(f) = V_a^b((f-g)+g) \le V_a^b(f-g) + V_a^b(g)$$
$$V_a^b(f) - V_a^b(g) \le V_a^b(f-g)$$

באופן דומה מקבלים גם להיפך.

8. תהי f בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$, אזי הפונקציה

$$[a,b] \to [0,\infty) : x \to V_a^x(f) - f(x)$$

מונטונית עולה. אכן: נניח כי $a \le x \le y \le b$. אזי

$$V_a^y - f(y) = V_a^x + V_x^y - f(y) = V_a^x - f(x) + V_x^y - (f(y) - f(x)) \ge V_a^x - f(x)$$

9. אם f מונוטונית על $[a,b]$ אזי f בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$ וכן

$$V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$$

10. **טענה 1.2** תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה. אזי f בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$ אם ורק אם f היא הפרש של שתי פונקציות מונוטוניות עולות על $[a,b]$.

הוכחה: כיוון אחד נובע מתכונה 9 (הפרש של שתי מונוטוניות יישאר בעל השתנות חסומה). הכיוון השני נובע מתכונות $3,8$ בעזרת

$$f(x) = V_a^x - (V_a^x - f(x))$$

■

מסקנה 1.3 אם f בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$ אזי f גזירה בכל מקום על $[a,b]$.

טענה 1.4 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בהחלט. אזי f בעלת השתנות חסומה על $[a,b]$, ופונקציית ההשתנות

$$[a,b]\to[0,\infty):x\to V_a^x(f)$$

היא רציפה בהחלט.

הוכחה: נשתמש בהגדרת הרציפות בהחלט עבור $\varepsilon=1$. קיים $\delta>0$ עבורו אם $(x_i,x_i')\subseteq[a,b]$ זרים בזוגות עם

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i'-x_i)<\delta$$

אזי

$$\sum_{i=1}^{k}|f(x_i')-f(x_i)|<1$$

מכאן נובע כי אם $a\le\xi\le\xi'\le b$ מקיימות $\xi'-\xi<\delta$, אזי $V_\xi^{\xi'}\le1$. לבסוף, יהיו $a=\xi_0\le\xi_1\le\cdots\le\xi_n=b$ עם $|\xi_{i+1}-\xi_i|<\delta$. אזי

$$V_a^b=\sum_i V_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\le n$$

לכן f בעלת השתנות חסומה. כעת, נוכיח כי $x\to V_a^x(f)$ רציפה בהחלט.
יהי $\varepsilon>0$. יהי $\delta>0$ כך שאם $(x_i,x_i')\subseteq[a,b]$ זרים בזוגות עם

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i'-x_i)<\delta$$

אזי

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i')-f(x_i)|<\varepsilon$$

יהיו $(x_i,x_i')\subseteq[a,b]$ זרים בזוגות עם

$$\sum_{i=1}^{n}x_i'-x_i<\delta$$

נסמן חלוקות של $[x_i,x_i']$ בתור

$$x_i=t_{i,0}\le t_{i,1}\le\cdots\le t_{i,k_i}=x_i'$$

אזי הקטעים

$$\{(t_{i,j-1},t_{i,j}) \mid 1\le i\le n, 1\le j\le k_i\}$$

זרים בזוגות, וסכום אורכיהם שווה בדיוק

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' - x_i < \delta$$

מכאן נקבל כי

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k_i}\left|f\left(t_{i,j}\right)-f\left(t_{i,j-1}\right)\right|\right) < \varepsilon$$

לכן

$$\sum_{i=1}^{n} V_{x_i}^{x_i'}\left(f\right) = \sum_{i=1}^{n}\sup\left\{\sum_{j=1}^{k_i}\left|f\left(t_{i,j}\right)-f\left(t_{i,j-1}\right)\right|\right\} \le \varepsilon$$

לבסוף,

$$\sum_{i=1}^{n}\left|V_a^{x_i'}-V_a^{x_i}\right| = \sum_{i=1}^{n}\left(V_a^{x_i'}-V_a^{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} V_{x_i}^{x_i'} \le \varepsilon$$

האי שוויון הזה נכון לכל בחירה של קטעים (x_i,x_i') כמו למעלה, ולכן נובע כי $x\to V_a^x\left(f\right)$ רציפה בהחלט. ■

מסקנה 1.5 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט. אזי f הפרש של שתי פונקציות מונוטוניות רציפות בהחלט.

הוכחה: $x\to V_a^x$, $x\to V_a^x - f\left(x\right)$ הן מונוטוניות ורציפות בהחלט. ■

1.1 נגזרת פונקציית ההשתנות

טענה 1.6 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה בהחלט. אזי פונקציית ההשתנות $[a,b]\to[0,\infty):x\to V_a^x\left(f\right)$ רציפה בהחלט ומונוטונית (ראינו) ומתקיים

$$\left(V_a^x\right)' = \left|f'\left(x\right)\right|$$

כמעט בכל מקום על $[a,b]$, ולכן

$$V_a^b = \int_a^b \left|f'\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t$$

הוכחה: תהי x נקודה בה f, $V_a^x(f)$ גזירות. אזי

$$\left(V_a^x\right)' = \lim_{h\to 0^+}\frac{V_a^{x+h}-V_a^x}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{V_x^{x+h}}{h} \geq \lim_{h\to 0^+}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} = \left|\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = |f'(x)|$$

מצד שני, לכל שתי נקודות $a\leq\xi\leq\xi'\leq b$ מתקיים

$$V_\xi^{\xi'}(f) \leq \int\limits_\xi^{\xi'} |f'(t)|\ \mathrm{d}t$$

אכן, לכל חלוקה $\xi = u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n = \xi'$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^n |f(u_i)-f(u_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \left|\int\limits_{u_{i-1}}^{u_i} f'(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \sum_{I=1}^n \int\limits_{u_{i-1}}^{u_i} |f'(t)|\ \mathrm{d}t = \int\limits_\xi^{\xi'} |f'(t)|\ \mathrm{d}t$$

לכן בכל x שבה V_a^x גזירה וכן

$$\frac{\mathrm{d}\int_a^v |f'(t)|\ \mathrm{d}t}{\mathrm{d}v}(x) = |f'(x)|$$

מתקיים

$$\left(V_a^x\right)' = \lim_{h\to 0^+}\frac{V_a^{x+h}-V_a^x}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{V_x^{x+h}}{h} \leq \lim_{h\to 0^+}\frac{\int_x^{x+h}|f'(t)|\ \mathrm{d}t}{h} = |f'(x)|$$

■

2 משפט לוזין

תזכורת אם (X,Σ) מרחב מדיד וכן $f : X \to [0,\infty]$ פונקציה, הגדרנו קירוב סטנדרטי $s_n \nearrow f$ על ידי פונקציות פשוטות:

$$s_n(x) = \begin{cases} 2^n & 2^n \leq f(x) \\ \frac{k}{2^n} & \left(\frac{k}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{2^n}, 0\leq k\leq 4^n-1\right) \end{cases}$$

תכונה אם $f\mid_A$ חסומה, עבור $A\subseteq X$, אזי $s_n \to f$ במידה שווה על A (כי אם $0 \leq f(x) \leq 2^n$ אזי $|f(x)-s_k(x)| \leq \frac{1}{2^k}$).

הערה 2.1 תהי $f : \mathbb{R}^d \to [0,\infty)$ מדידה לבג. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $A\subseteq\mathbb{R}^d$ מדידה לבג כך שעל תת קבוצות חסומות של A, f חסומה, וכן $m(A^c) < \varepsilon$.

הוכחה: נסמן

$$E_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid ||x|| \le 1\right\}$$
$$E_j = \left\{x \in \mathbb{R}^d \mid j \le ||x|| \le j+1\right\}$$

לכל j מתקיים $m(E_j) < \infty$ וכן

$$E_j \supseteq E_j \cap \{f \ge 1\} \supseteq E_j \cap \{f \ge 2\} \supseteq \dots$$

לכן יש n_j עבורו

$$m\left(E_j \cap \{f \ge n_j\}\right) < \frac{\varepsilon}{2^j}$$

נסמן

$$A_j = E_j \cap \{f \ge n_j\}$$

ולבסוף ניקח

$$A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$$

■

משפט 2.2 (לוזין) תהי $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ מדידה לבג. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ רציפה עבורה

$$m\left(\{f \ne \varphi\}\right) < \varepsilon$$

משפט 2.3 (לוזין, גרסה שנייה) תהי $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ מדידה לבג. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימת $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה עם $m(A^c) < \varepsilon$ וכן $f\mid_A : A \to \mathbb{C}$ רציפה.

הוכחה: ראשית, אם המשפט נכון עבור שתי פונקציות f, f' אזי הוא נכון גם עבור $f + f'$ (מקבלים A, A' ולוקחים $A \cap A'$ עבור $f + f'$). בנוסף, אם המשפט נכון עבור f, הוא נכון עבור αf, כאשר $\alpha \in \mathbb{C}$. לכן נוכל להניח כי $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$.
יהי $\varepsilon > 0$. צריך למצוא $A \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה לבג עבורה $f\mid_A$ רציפה וכן $m(A^c) < \varepsilon$.
ראשית נניח כי $f = \chi_E$, כאשר E מדידה לבג. קיימות $F \subseteq E \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^d$, כאשר F סגורה, G פתוחה וכן $m(G \backslash F) < \varepsilon$. כעת, $G^c \subseteq \mathbb{R}^d$ סגורה, ולכן $F \cup G^c \subseteq \mathbb{R}^d$ סגורה.
נבדוק כי $f\mid_{F \cup G^c}$ רציפה, ואז ניתן לקחת $A = F \cup G^c$, כי $m(A^c) = A(F^c \cap G) = m(G \backslash F) < \varepsilon$.

נניח כי $F \cup G^c \ni x_n \to x \in F \cup G^c$. אם $x \in F$, אז קיים N עבורו לכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in F$: אחרת $x \in F$ הינו גבול של סדרה מתוך G^c, אבל G^c סגורה, וכן $x \notin G^c$, בסתירה.

מכאן נובע כי $f(x_n) = 1$ לכל $n \geq N$ ולכן $f(x) = 1 \to f(x_n)$. אם $x \in G^c$, באופן דומה, קיים N עבורו לכל $n \geq N$ מתקיים $x_n \in G^c$ ומסיקים $f(x_n) \to f(x)$. מכאן נובע שהמשפט נכון עבור $f = \chi_E$ עבור E מדידה. לכן המשפט נכון גם עבור פונקציה פשוטה.

כעת, נניח כי f מדידה לבג וחסומה על כל קבוצה חסומה. יהי $s_n \nearrow f$ הקירוב הסטנדרטי. אזי $s_n \to f$ במידה שווה על כל קבוצה חסומה. יהי $\varepsilon > 0$. לכל n יש $A_n \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה כך שהפונקציה $s_n |_{A_n}$ וכן $m(A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. נגדיר

$$A = \bigcap_n A_n$$

אזי

$$m(A^c) = m\left(\bigcup_n A_n^c\right) < \varepsilon$$

כמו כן, $s_n |_A$ רציפה לכל n. לכל k מתקיים $s_n |_{A \cap B(0,k)} \to f |_{A \cap B(0,k)}$ במידה שווה, ולכן $f |_{A \cap B(0,k)}$ רציפה לכל k, ולכן $f |_A$ רציפה.

המקרה של $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ כללית (מדידה לבג): יהי $\varepsilon > 0$. קיימת $A_1 \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה לבג ועם $m(A_1^c) < \varepsilon$ וכן $f |_{A_1}$ חסומה על כל קבוצה חסומה. נסמן $g = f \cdot \chi_{A_1} : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$. אז g חסומה על כל קבוצה חסומה. לכן קיימת $A_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידה כך שמתקיים $m(A_2^c) < \varepsilon$ וכן $g |_{A_2}$ רציפה. נקח $A = A_1 \cap A_2$. אזי $f |_A = g |_A = g |_{A_2}|_A$ רציפה, וכן $m(A^c) = m(A_1^c \cup A_2^c) < 2\varepsilon$. ■

הערה 2.4 הגרסה השנייה לא אומרת כי f רציפה על כל נקודה בתוך A, אלא רק שכל נקודה $x \in A$ היא נקודת רציפות של $f |_A$.

טענה 2.5 שתי הגרסאות של משפט לוזין שקולות.

הוכחה: גרסה ראשונה $\Leftarrow$ גרסה שנייה: ניקח $A = \{x \mid f(x) = \varphi(x)\}$.

גרסה שנייה $\Leftarrow$ גרסה ראשונה: בסימוני הגרסה השנייה, קיימת $F \subseteq A$ עם $m(A \backslash F) < \varepsilon$ ולכן $m(F^c) < 2\varepsilon$. כעת,

$$f |_F = f |_A|_F$$

היא רציפה, וכן F סגורה. ממשפט טיצה, קיימת φ רציפה עבורה $\varphi |_F = f |_F$, ואז $m(f \neq \varphi) \leq m(F^c) < 2\varepsilon$. ■

3 קונבולוציה על $\mathbb{R}^d$

3.1 מדידות

תהי $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ מדידה לבג. אזי הפונקציה

$$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : (x, y) \to f(x)$$

היא מדידה. נשתמש בטרנספורמציה הלינארית ההפיכה $T:\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$, המוגדרת

$$T(x,y)=(x-y,y)$$

בעזרת T נסיק כי $(x,y)\to f(x-y)$ מדידה לבג. אם גם g מדידה על $\mathbb{R}^d$ אזי הפונקציה

$$\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}:(x,y)\to f(x-y)\,g(y)$$

מדידה.

3.2 אינטגרביליות

כעת נניח כי f,g אינטגרביליות על $\mathbb{R}^d$. אזי

$$\begin{aligned}\int\int|f(x-y)\,g(y)|\;\mathrm{d}(m\times m)(x,y)&=\int\left(\int|f(x-y)|\,|g(y)|\;\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y=\\=\int\left(\int|f(x-y)|\;\mathrm{d}x\right)g(y)\;\mathrm{d}y&=\int\left(\int|f(x)|\;\mathrm{d}x\right)|g(y)|\;\mathrm{d}y=\\&=\left(\int|f|\right)\left(\int|g|\right)=||f||_1\,||g||_1\end{aligned}$$

לכן הפונקציה $(x,y)\to f(x-y)\,g(y)$ אינטגרבילית על $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$. ממשפט פוביני נובע כי הפונקציה $y\to f(x-y)\,g(y)$ אינטגרבילית כמעט לכל x, והפונקציה

$$x\to\int f(x-y)\,g(y)\;\mathrm{d}y$$

המוגדרת כמעט בכל מקום, היא אינטגרבילית וכן

$$\int\left(\int f(x-y)\,g(y)\;\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}f(x-y)\,g(y)\;\mathrm{d}m\times m=\int\left(\int f(x-y)\,g(y)\;\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\left(\int f\right)\left(\int g\right)$$

הגדרה 3.1 מסמנים את הקונבולוציה להיות

$$(f*g)(x)=\int f(x-y)\,g(y)\;\mathrm{d}y$$

אזי $f*g$ מוגדרת כמעט בכל מקום, $f*g$ אינטגרבילית וכן

$$\int f*g=\int f\cdot\int g$$

3.3 מרחבי L_p, L_q

טענה 3.2 יהיו $1 < p,q < \infty$ צמודים. נניח $f \in L^1 \cap L^p, g \in L^1 \cap L^q$ (נסמן גם $\tilde{f}(t) = f(-t)$). אזי $f * g$ רציפה.

הוכחה: נניח כי $x_n \to x$. אזי

$$\begin{aligned} |(f*g)(x_n) - (f*g)(x)| &= \left| \int f(x_n - y) g(y) \, \mathrm{d}y - \int f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y \right| \leq \\ &\leq \int |f(x_n - y) - f(x-y)| \, |g(y)| \, \mathrm{d}y \leq \\ &\leq \sqrt[p]{\int |f(x_n - y) - f(x-y)|^p \, \mathrm{d}y} \, ||g||_q = \\ &= \sqrt[p]{\left| \tilde{f}(y - x_n) - \tilde{f}(y - x) \right|^p \, \mathrm{d}y} \, ||g||_q \to 0 \end{aligned}$$

■

יישום לסכום קבוצות: אם $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$, נסמן

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

משפט 3.3 אם $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ מדידות לבג וכן $m(A) > 0, m(B) > 0$. אז $A + B$ מכילה קטע פתוח לא ריק.

הוכחה: על ידי החלפת A, B בקבוצות $A \cap B(0,n)$, $B \cap B(0,n)$, אפשר להניח כי A, B חסומות. אזי $\chi_A, \chi_B \in L^2$. לכן $\chi_A * \chi_B$ רציפה. נשים לב שאם $\chi_A * \chi_B \neq 0$, אזי $x \in A + B$. אכן, נתון כי

$$0 \neq \int \chi_A(x-y) \chi_B(y) \, \mathrm{d}y$$

ולכן קיימת $y \in B$ עבורו $x - y \in A$, ואז $x = (x-y) + y$. לכן די להוכיח שקיים קטע פתוח I לא ריק, עבורו $\chi_A * \chi_B$ לא מתאפסת. אבל $\chi_A * \chi_B$ רציפה, ולכן מספיק להוכיח כי $\chi_A * \chi_B \neq 0$.

אבל

$$\int \chi_A * \chi_B = \int \chi_A \int \chi_B = m(A) m(B) \neq 0$$

ולכן $\chi_A * \chi_B \neq 0$. ■