

CLASS EXERCISE 1

1. A sequence of sets $\{A_n\}$ is said to be increasing to the set A ($A_n \uparrow A$) if $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$, and $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
 A sequence of sets $\{A_n\}$ is said to be decreasing to the set A ($A_n \downarrow A$) if $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$, and $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
 - (a) Let P be a probability measure on a σ -algebra $\mathcal{F}$. Show that P is continuous: if $A_n \uparrow A$, then $P(A_n) \rightarrow P(A)$. Conclude for $A_n \downarrow A$.
 - (b) Let P be a probability measure on a σ -algebra $\mathcal{F}$, which is **additive**, but **not necessarily σ -additive** (That is, $P(\biguplus A_n) = \sum P(A_n)$ only for a finite number of disjoint sets A_n). In addition, Assume that if A_n is a decreasing sequence of sets such that $A_n \downarrow \emptyset$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$. Prove that P is a σ -**additive** probability measure.
2. Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space and $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ an arbitrary sequence of events. Prove the following:
 - (a) $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$ (finite number of sets)
 - (b) $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (countable number of sets)
3. Let $x = (0.x_1 x_2 x_3 \dots)_{10}$ be the decimal representation of $x \in [0, 1)$.
 show that the set $A = \{x \in [0, 1) : 7 \text{ appears infinitely many times in the decimal representation of } x\}$ is a Borel set.
4. Let $\Omega = \mathbb{R}$ and define $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ or } A^c \text{ is countable}\}$
 - (a) Is $\mathcal{F}$ a σ -algebra?
 - (b) Define a function P on $\mathcal{F}$ as follows:
 For each $A \in \mathcal{F}$, $P(A) = 0$ if A is countable, $P(A) = 1$ if A^c is countable.
 Is P a probability measure?
5. Let $\mathcal{F}_i$ be an increasing sequence ($\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots$) of σ -algebras and define $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_i$.
 - (a) Is $\mathcal{F}$ an algebra?
 - (b) Is $\mathcal{F}$ a σ -algebra?

www.math.tau.ac.il/~eronshir

eronshir@post..

יש קצת - קצת חזקה $\frac{2}{3}$, יאללה (כנסה) 8 תחילת

מ"ה (Ω, F, P)
 מ"ה $\rightarrow$ הסתברות
 מ"ה $\rightarrow$ מ"ה
 מ"ה $\rightarrow$ מ"ה

ס. ב. המאמר הוא ס-אלגברה:

$$\begin{aligned} \emptyset \in F & \quad (1) \\ A^c \in F \Leftrightarrow A \in F & \quad (2) \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F \Leftrightarrow A_1, A_2, \dots \in F & \quad (3) \end{aligned}$$

מ"ה הסתברות

$$P: F \rightarrow [0, 1] \quad (1)$$

$$P(\Omega) = 1 \quad (2)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{ע"י } A_1, A_2, \dots \in F \text{ זוגות בלתי תלויים} \quad (3)$$

X

(1) מ"ה (Ω, F, P)

מ"ה ϕ זוגות

בלתי תלויים $A_1, A_2, \dots \in F$, $A_n \uparrow A$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(A) \quad \text{ע"י}$$

$$: A_n \uparrow A$$

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$$

$$A_n \uparrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A$$

(increasing sequence)

$$: A_n \downarrow A$$

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$$

$$A_n \downarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A$$

$$A_n \uparrow A \text{ נ"ח : } \frac{\text{מכסה}}{\text{כזה}}$$

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$

$$B_n = A_n \setminus A_{n-1}$$

} $\Rightarrow$

$$\text{הכל } B_n \text{ (1)}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \text{ (2)}$$

$$(A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$$

$$A_n = \bigcup_{i=1}^n B_i \text{ (3)}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \stackrel{(2)}{=} P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) \stackrel{\text{הכל } B_i \subseteq A}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(B_i) =$$

$$\text{הכל } (3) \Leftarrow = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)$$



(ד) נניח P - סבירות על המרחב Ω - סבירות

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0 \quad \text{כך} \quad A_n \searrow \emptyset$$

נניח P - סבירות, $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ כגון

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{כך}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right) =$$

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) + P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_i) + \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} A_i\right)$$

$$B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \searrow \emptyset$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \emptyset$$

(*)

$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \text{ מודל (2)}$$

$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) \quad \text{למשל}$$

$$n=2 \quad 2/3 \quad 1/3 + 1/3$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P((A_1 \setminus A_2) \cup A_2) =$$

$$= P(A_1 \setminus A_2) + P(A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$$

$$\bigcap_{i=1}^n A_i$$

$$2/3 + 1/3 = 1$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (*)$$

$$\forall n \quad P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

$$B_n := \bigcup_{i=1}^n A_i \nearrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq$$

$$(1) \quad (1, 2, 3)$$

$$(2) \quad (1, 3, 2)$$

$$(3) \quad (2, 1, 3)$$

$$(4) \quad (3, 1, 2)$$

$$(5) \quad (1, 2, 3, 4)$$

$$(6) \quad (1, 3, 2, 4)$$

$$(7) \quad (2, 1, 3, 4)$$

$$(8) \quad (3, 1, 2, 4)$$

$$(9) \quad (1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\Rightarrow (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(3) $x = (x_1, x_2, \dots)$, $x \in [0, 1)$ ו

$$A = \{x \in [0, 1) \mid \text{יש } n \text{ כזה ש-} x_n = 7\}$$

$$A_n = \{x \in [0, 1) \mid x_n = 7\}$$

$$A_1 = [0.7, 0.8)$$

$$A_2 = [0.07, 0.08) \cup \dots \cup [0.97, 0.98)$$

כל $x \in A$ הוא $x \in A_n$ עבור n כלשהו

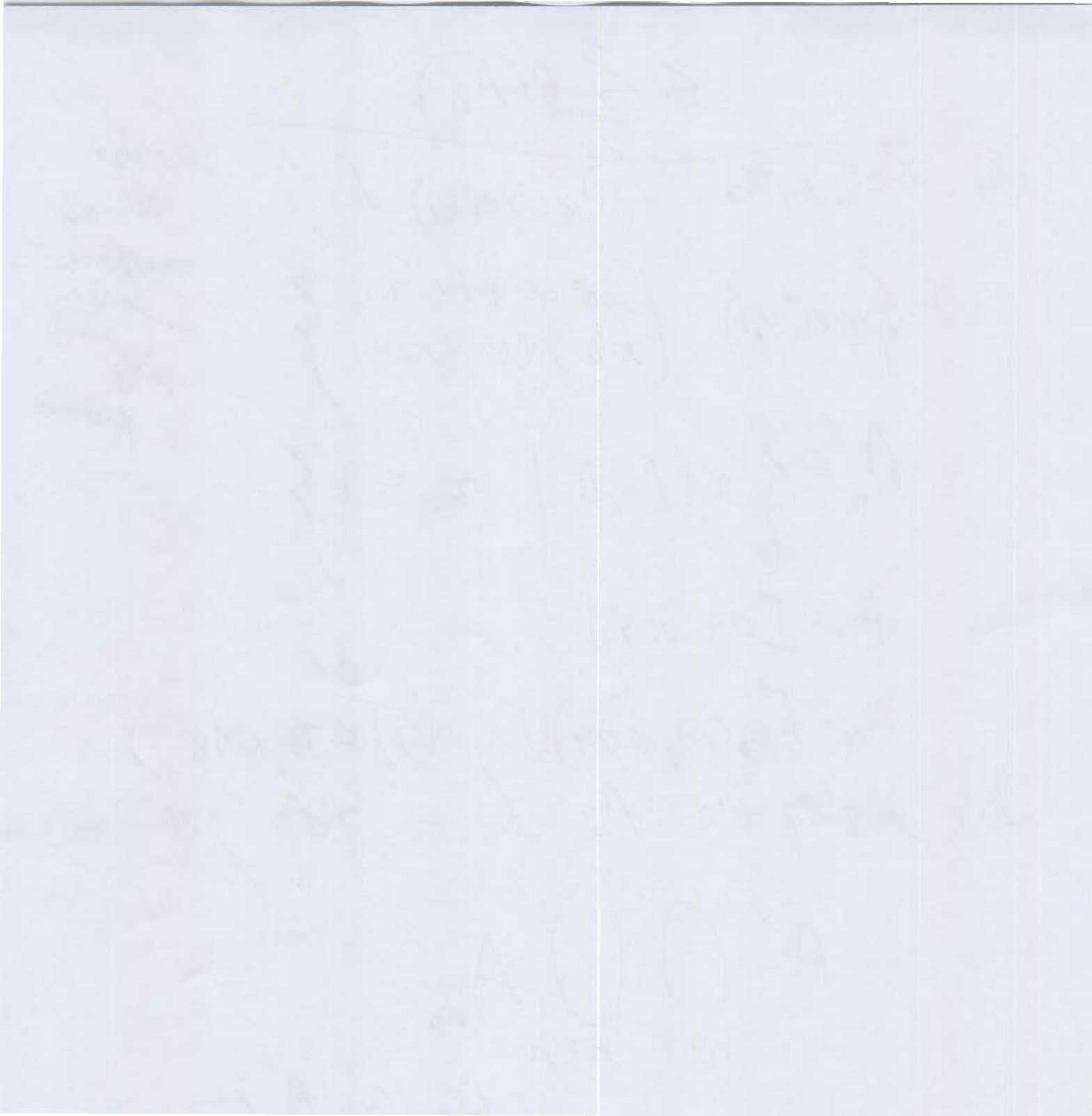
$$A = \bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} A_m$$

כל $x \in A$

קטגוריה

לפי

ההבחנה
המשפט
המשפט
(המשפט)



CLASS EXERCISE 2

1. Let $(0.x_1, x_2, \dots)_{10}$ be the decimal representation of a number $x \in [0, 1]$. Prove that the set $A = \{x \in [0, 1] : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\}$ is a Borel set.
2. Characterize the random variables on the following σ -algebras:
 - (a) $F = \{\Omega, \emptyset\}$
 - (b) $\Omega = \mathbb{R}$, $F = \{A \subseteq \mathbb{R} : x \in A \Leftrightarrow -x \in A\}$ (symmetrical sets in $\mathbb{R}$)
3. Let X, Y be random variables. show that $X+Y$ is also a random variable.
4. Let $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ be a probability space, where Ω is the boundary of the unit square (the square which vertices are $(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0)$), $\mathbb{F}$ the class of all Borel subsets of Ω , and $\mathbb{P}$ the probability measure on Ω defined according to the Lebesgue measure. What is the probability that the x -coordinate of a point would be smaller than some value x ?
5. Let Q be a square in $\mathbb{R}^2$ with area 1, and let Ω be the set of all points whose distance from Q (that is, the distance to the closest point in Q) is at most 1. Let $\mathbb{F}$ be the class of all Borel subsets of Ω , and $\mathbb{P}$ the probability measure on Ω defined according to the Lebesgue measure. Consider the probability space $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. What is the probability that the distance between a point and the square Q is at most d ?
6. Let $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ is Lebesgue measurable}\}$. Show that $\mathcal{A}$ is a σ -algebra.

(1) הוצגה רצף מסתברת $X \in [0,1)$ (אופרטור: $(0, x_1, x_2, \dots)_0$)
 מוכחה: $A = \{x \in [0,1) : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\}$ היא קבוצת מלאה.
 הוכחה: צד $A \neq \emptyset$ מלאה, מלאה.

נבני קבוצת מלאה $A_{i,d} = \{x \in [0,1) / x_i = x_{i-1} = d\}$ קב"ה מלאה. אלוהי סופ' (קב"ה מלאה (= קבוצות מלאה))

$$\bigcup_{d=0}^1 \bigcup_{i=0}^{\infty} A_{i,d}$$

לדוגמה: במקום $A_{i,d}$, אלוהי $\{x_n = d\}_{n \geq i}$

דוגמה: אם A מלאה, בקב"ה מלאה, נבני לא אומר הוכחה של קב"ה מלאה!

משפטים וקרייז

$(\mathcal{L}, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות.

$X: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ אם $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, P)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, X^{-1}(-\infty, x] \in \mathcal{F} \equiv X^{-1}(-\infty, x] = \{\omega \in \mathcal{L} / X(\omega) \leq x\}$$

(2) נאמן את המרחב המקריס הבאים:

(א) $\mathcal{L}$ מלאה, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \mathcal{L}\}$ רק פונקציות ידועות מלאה במקרה הנני

(ב) $\mathcal{L} = \mathbb{R}$ $\mathcal{F} = \{A \in \mathbb{R} / x \in A \iff -x \in A\}$ רק פונקציות (סימטריות).

(3) אם X, Y אם $(\mathcal{L}, \mathcal{F}, P)$ אם $X+Y \leq a$

$$\forall a \in \mathbb{R} \{X+Y \leq a\} \equiv \{\omega \in \mathcal{L} / X(\omega) + Y(\omega) \leq a\}$$

מקומות נני אפילו למדוק האם המלאים $\{X+Y > a\}$ מלאה.

$$\{X > b\} \cap \{Y > c\} \in \mathcal{F}$$

נשים את נק' (א, ב) על הישר ונק' איתנו על $\mathcal{L}$

נק' היצירות (אם אין מניין לא נאמר). וקראנו את $\mathcal{L}$ הקרן

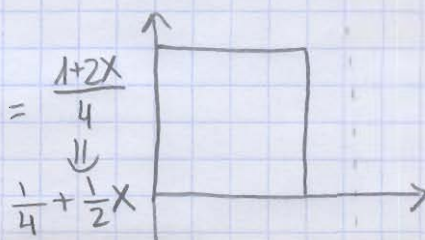
$$\{X+Y > a\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [\{X > q\} \cap \{Y > a-q\}]$$

(4) נבני $X(x, y)$ אם $X(x, y) = X$ מה ההסתברות $P(\{\omega \in \mathcal{L} / X(\omega) \leq x\})$

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ 0 & x < 0 \\ 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\frac{1+2x}{m(\mathcal{L})} = \frac{1+2x}{4}$$

איתנו סופ' (מקרה הנני) (האם 4)



গণিত অংক (২)

১) একটি কক্ষের দৈর্ঘ্য ১০ মিটার এবং প্রস্থ ৬ মিটার।

একটি বর্গাকার টাইলসের দৈর্ঘ্য ২ মিটার এবং প্রস্থ ১ মিটার।

কক্ষটিকে টাইলসে কতটি টাইলসে পূরণ করা যাবে?

সমাধান: কক্ষের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

$= 10 \text{ মিটার} \times 6 \text{ মিটার} = 60 \text{ বর্গমিটার}$

একটি টাইলসের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

$= 2 \text{ মিটার} \times 1 \text{ মিটার} = 2 \text{ বর্গমিটার}$

কক্ষটিকে টাইলসে পূরণ করতে প্রয়োজনীয় টাইলসের সংখ্যা

$= \frac{\text{কক্ষের ক্ষেত্রফল}}{\text{টাইলসের ক্ষেত্রফল}} = \frac{60}{2} = 30$

অতএব, কক্ষটিকে ৩০টি টাইলসে পূরণ করা যাবে।

২) একটি কক্ষের দৈর্ঘ্য ১২ মিটার এবং প্রস্থ ৮ মিটার।

একটি বর্গাকার টাইলসের দৈর্ঘ্য ৩ মিটার এবং প্রস্থ ২ মিটার।

কক্ষটিকে টাইলসে কতটি টাইলসে পূরণ করা যাবে?

সমাধান: কক্ষের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

$= 12 \text{ মিটার} \times 8 \text{ মিটার} = 96 \text{ বর্গমিটার}$

একটি টাইলসের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

$= 3 \text{ মিটার} \times 2 \text{ মিটার} = 6 \text{ বর্গমিটার}$

কক্ষটিকে টাইলসে পূরণ করতে প্রয়োজনীয় টাইলসের সংখ্যা

$= \frac{\text{কক্ষের ক্ষেত্রফল}}{\text{টাইলসের ক্ষেত্রফল}} = \frac{96}{6} = 16$

অতএব, কক্ষটিকে ১৬টি টাইলসে পূরণ করা যাবে।

৩) একটি কক্ষের দৈর্ঘ্য ১৫ মিটার এবং প্রস্থ ১০ মিটার।

একটি বর্গাকার টাইলসের দৈর্ঘ্য ৪ মিটার এবং প্রস্থ ৩ মিটার।

কক্ষটিকে টাইলসে কতটি টাইলসে পূরণ করা যাবে?

সমাধান: কক্ষের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

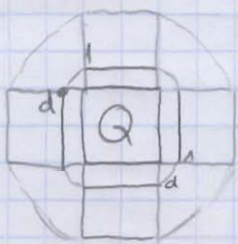
$= 15 \text{ মিটার} \times 10 \text{ মিটার} = 150 \text{ বর্গমিটার}$

একটি টাইলসের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

$= 4 \text{ মিটার} \times 3 \text{ মিটার} = 12 \text{ বর্গমিটার}$

কক্ষটিকে টাইলসে পূরণ করতে প্রয়োজনীয় টাইলসের সংখ্যা

$= \frac{\text{কক্ষের ক্ষেত্রফল}}{\text{টাইলসের ক্ষেত্রফল}} = \frac{150}{12} = 12.5$



$$P(D \leq d) \cdot D((x,y)) = \frac{P(d)}{Q_N} \quad D \text{ נ"ח (5)}$$

$$\begin{cases} 1 & d \geq 1 \\ 0 & d < 0 \\ \frac{4d + \pi d^2 + 1}{5 + \pi} & 0 \leq d \leq 1 \end{cases}$$

$$0 \leq D \leq 1$$

(1 פוליגון) $\frac{P(d)}{Q_N}$ $\leftarrow$ $\frac{5 + \pi}{5}$

2) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$$= -2x^{-3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

CLASS EXERCISE 3

1. $(\Omega = [0, 1], \mathbb{B}[0, 1], \mathbb{P} = \text{Lebesgue measure})$ a probability space.

$$X(w) = \begin{cases} w & 0 \leq w \leq 1/2 \\ \frac{1}{w} & 1/2 < w \leq 1 \end{cases}$$

Find F_X , the cdf of X .

2. Let

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.1 + x & 0 \leq x < 1/2 \\ a(x-1)^2 + b & 1/2 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Find a, b given that $P(X = 1/2) = 1/4$, and that the set of atoms of X is contained in $(-\infty, 1/2]$.

- (b) Does F have density?

3. Let F be the d.f. of some random variable X , and $\alpha : 0 < \alpha < \infty$.

Define $F_\alpha(x) = (F(x))^\alpha$.

- (a) Is $F_\alpha(x)$ a d.f. (of some r.v. X_α)?
 (b) Does A_α , the set of atoms of F_α , equal A_1 , the set of atoms of F ?
 (c) Is it true that $P(X \in A_1) = P(X_\alpha \in A_\alpha)$?

4. Remark:

If $\forall a \in \mathbb{R} F_X(a) = F_Y(a)$ it **does not** necessarily say that $X \equiv Y$. Examples: $(\Omega = [0, 1], \mathbb{B}([0, 1]), \mathbb{P} = \text{Lebesgue measure})$.

- (a)

$$X(w) = w$$

- (b)

$$X(w) = \begin{cases} w & 0 \leq w < 1/2 \\ \frac{3}{2} - w & 1/2 \leq w \leq 1 \end{cases}$$

(c)

$$X(w) = \begin{cases} w + \frac{1}{2} & 0 \leq w < 1/2 \\ w - \frac{1}{2} & 1/2 \leq w \leq 1 \end{cases}$$

5. Find the distribution function and density if it exists of the r.v. Y , when $Y = X^2, X \sim U(-3, 2)$.

6. Let X be a r.v. with distribution function F .

- (a) Show that if F is continuous and strictly increasing then the random variable $Y = F(X)$ (that is $Y(\omega) = F(X(\omega))$) is distributed uniformly on $(0,1)$.
- (b) Is this result still true when F is continuous but not strictly increasing?
- (c) Show that if F is not continuous then the distribution of Y is not uniform.

התוצאה היא

5 : יתכן שתחת תנאים מסוימים

טנקציות התפלגות של נא"ח X :

$$F_X: \forall x \in \mathbb{R} \quad F_X(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\})$$

תכונות:

$$F_X(x_1) \leq F_X(x_2) \quad x_1 < x_2 \quad .1$$

$$F_X(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(x) \quad \text{כאן, } x_n \nearrow x \text{ או } x_n \searrow x \quad .2$$

$$F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1, \quad F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \quad .3$$

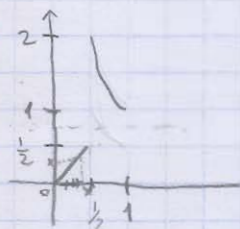
הצורה

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{כאן } f \text{ היא צפיפות } X$$

תכונות

$$f \geq 0 \quad .1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1 \quad .2$$



$$X(\omega) = \begin{cases} \omega & 0 \leq \omega \leq 1/2 \\ \frac{1}{\omega} & 1/2 < \omega \leq 1 \end{cases} \quad .1$$

$$(X \leq x) \quad F_X(x) = ? \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$x \geq 2 : F_X(x) = 1$$

$$x < 0 : F_X(x) = 0$$

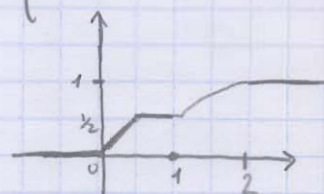
$$0 \leq x < 1/2 : F_X(x) = x$$

$$1/2 \leq x < 1 : F_X(x) = 1/2 + 0 = 1/2$$

$$1 \leq x \leq 2 : F_X(x) = 1/2 + (1 - \frac{1}{x}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{x}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1/2 \\ 1/x^2 & 1/2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2} - \frac{1}{x} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$



כאן $F_X(x)$ היא פונקציית התפלגות
כאן $f_X(x)$ היא פונקציית הצפיפות

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.1 + x & 0 \leq x < 1/2 \\ a(x-1)^2 + b & 1/2 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$P(X = 1/2) = 1/4 \quad \text{לפי } \textcircled{1} \quad .2$$

② קב' (האילוץ) של הפונקציה $(-\infty, 1/2]$

$$P(X \leq x) - P(X < x) = P(X = x) > 0 \quad \text{אם } x \text{ היא נקודה של התפלגות}$$

$$F_X(x) - F_X(x^-)$$

הפרק (הקפיצה)

$$1/4 = F_X(1/2) - F_X(1/2^-) = \frac{a}{4} + b - 0.6 \quad \text{כאן } 0.1 + 0.5$$

$$F_X(1) = F_X(1^-) \Rightarrow b = 1$$

$$1 = a(1-1)^2 + b$$

הקפיצה, $(1/2, 1]$

כאן $f_X(x)$ היא פונקציית הצפיפות

(b) און צעייסן, כי לי אלוים.

$$F_\alpha(x) = (F(x))^\alpha, \quad 0 < \alpha < \infty, \quad X \sim F. \quad 3.$$

און (a): אפוק אר שלולת התפולת של פון היסחחות וצמחית.

$$\left. \begin{array}{l} A_\alpha : F_\alpha \text{ פק אלוים} \\ F : F \text{ " " "} \end{array} \right\} A_\alpha = A \text{ פק} \quad (b)$$

$$F_\alpha(x^-) < F_\alpha(x) = \quad x \in A_\alpha \text{ ונח}$$

$$(F(x^-))^\alpha < (F(x))^\alpha \iff F(x^-) < F(x) \iff x \in A_1$$

$$? \quad P(x \in A_\alpha) = P(x_\alpha \in A_\alpha) \quad (c) \text{ פוק}$$

אד. אלוים וסותת: אלוים אר: x_0 , $P(X=x_0) = \frac{1}{2}$,

$$F(X < x_0) = F(x_0^-) = 0$$

CLASS EXERCISE 4

1. Let X be a r.v. with distribution function F .

- (a) Show that if F is continuous and strictly increasing then the random variable $Y = F(X)$ (that is $Y(\omega) = F(X(\omega))$) is distributed uniformly on $(0,1)$.
- (b) Is this result still true when F is continuous but not strictly increasing?
- (c) Show that if F is not continuous then the distribution of Y is not uniform.

2. Find the distribution of Y in the following cases:

- (a) $X \sim \exp(\lambda), Y = -\ln X$
- (b) $X \sim U(0, 1), Y = -\ln X$
- (c) $X \sim U(-3, 2), Y = X^2$

3. For $a > 0$ let

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-ax} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

For which value of k the function f may be a density function?

4. A non-negative continuous random variable is said to be memoryless if -

$$\forall t, s > 0, P(X > t + s \mid X > t) = P(X > s).$$

Prove a continuous $X \geq 0$ (with $P(X > 0) > 0$) is memoryless iff $X \sim \exp(\lambda)$.

5. A man is standing on the point $(1, 0)$ in the plane, throwing a ball towards the y axes. The angle between the direction of the ball and the x axes is a random variable α whose distribution is uniform on the interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Let Y be the y-coordinate of the hitting point of the ball on the y axes. Find F_Y , the distribution function of Y , and its density, if it exists.

X מתפלגת בעל צפיפות $f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ מונוטונית וצדדית, אז

$Y = g(X)$ בעל צפיפות f_Y שניתנה על ידי

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \text{ לא באזור } g \\ f_X(g^{-1}(y)) | (g^{-1}(y))' | & y \text{ באזור } g \end{cases}$$

1. X מתפלגת בעל פונקציית התפלגות F . נניח: אם F רציפה

ואז $Y = F(X)$ מתפלגת $U(0,1)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(F(X) \leq y)$$

הוכחה:

$$0 \leq F(X) \leq 1$$

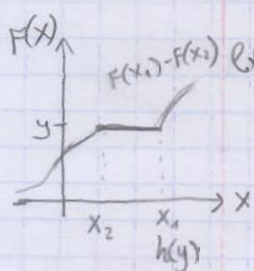
$$y < 0 : 0 = F_Y(y) \quad \leftarrow$$

$$y \geq 1 : 1 = F_Y(y)$$

$$0 \leq y < 1$$

$$\begin{aligned} P(F(X) \leq y) &= P(X \in F^{-1}([0, y])) = \\ &= P(X \leq F^{-1}(y)) = F(F^{-1}(y)) = y \end{aligned}$$

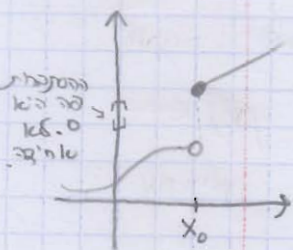
כי F רציפה



ה. האם התוצאה נשארת נכונה כאשר F רציפה, אך לא בהכרח עולה? נל סעיף 1, $y \geq 1$ קל לראות שנשארת אותו דבר.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(F(X) \leq y) = \\ &= P(X \in F^{-1}([0, y])) = P(X \leq h(y)) = F(h(y)) = y \end{aligned}$$

$h(y) = \sup\{t \in \mathbb{R} / F(t) \leq y\}$ $\downarrow$ רציפה F



ע. האם התוצאה נשארת נכונה אם F לא רציפה?

$$P(X \leq x_0) = F(x_0) \geq F(x_0^-) = P(X < x_0)$$

$$\begin{aligned} [y_1, y_2] \subset [F(x_0^-), F(x_0)] \\ P(F(X) \in [y_1, y_2]) = 0 \end{aligned}$$

2. $Y = -\ln X$, $X \sim U(0,1)$. מצא צפיפות Y . האם $Y > 0$

צדדית ומונוטונית. $g(t) = -\ln t$. אז $g^{-1}(y) = e^{-y}$

בזמן שנתפלגת בעל צפיפות $f_Y(y) = 0$ עבור $y < 0$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(-\ln X \leq y) = P(\ln X \geq -y) = \\ &= P(X \geq e^{-y}) = 1 - e^{-y} \end{aligned}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ 1 - e^{-y} & y \geq 0 \end{cases} = \exp(-y)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda y} & y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

הצורה הכללית: $\mu_c, Y \sim \exp(\lambda)$
($\lambda > 0$)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

יחסיו עם צמח שנים (*) ואקראי

$$F_Y(y) = 1 - F_X(e^{-y})$$

$$f_Y(y) = f_X(e^{-y}) \cdot (-e^{-y})$$

ମରବୀର ଯୁଦ୍ଧ ପ୍ରତି

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-ax} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad a > 0 \quad \text{Aufg. 3}$$

ענין א' צו ק' (אין מילד) f וואס פארן צו צוויי?
ט' אין א' $a \leq 0$ אז ווערט דאס נישט.

$$1 = \int_0^{\infty} kx e^{-ax} dx \quad \underline{\underline{\text{22.11}}} \quad k = a^2$$

$P(X > x+y | X > x) = P(X > y)$: זהו תכונה של משתנה אקספוננציאלי. 4

2) $X \sim \exp(\lambda)$ ה"א $P(X > 0) > 0$ ו"א $P(X > 0) = 1$ (כי X הוא זמן חייה של תאית)

ונוסחה: $\Rightarrow$ ניקח פא $F_y(y)$ מקטל 2. ונצב בהצטרף של "חסר-צ'רון". ק"ל עמלות.

... {3} נח' של מצבון ההסתברות $F(t)$ וכן $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ /no/ ←

$$\bar{F}(t+s) = \bar{F}(t) \bar{F}(s) \quad \text{r.p.m}$$

$$\bar{F}(1) = \bar{F}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \left(\bar{F}\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \dots = \left(\bar{F}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$$\bar{F}(1/n) = (\bar{F}(1))^{1/n}$$

$$\bar{F}(r) = (\bar{F}(1/n))^m = (\bar{F}(1))^{m/n} = (\bar{F}(1))^r \quad (r = m/n \quad m \in \mathbb{N})$$

וארצות איון אם מי נטון אל רצו'א, מי נטון אל

$$\bar{F}(y) = (\bar{F}(1))^y$$

$$r_n \searrow y \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F(r_n) = F(y) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (F(r_n))^{r_n} = (F(y))^y$$

נשמר מהקוד $\bar{F}(1) \neq 0$ (ובי ניהא ארצות).

CLASS EXERCISE 5

1. Find the expectation of a random variable with the following distribution function:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1/2 \\ 0.5 & 1/2 \leq x < 1 \\ 3/2 - 1/x & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Use two different methods.

2. compute $E(Y)$ in the following cases:

(a) $X \sim \exp(\lambda)$, $Y = e^{nX}$.

(b) $X \sim N(0, 1)$, $Y = X^n$.

3. Let $g(a) = E((X - a)^2)$, X some r.v. s.t. $E(X^2) < \infty$.

Show that the minimum of $g(a)$ is reached at $a = E(X)$.

4. Part of a question from Professor Tsirelson's exam (01/07/02):

Let X be an integrable r.v. and define

$$U(t) = E|X - t|$$

Prove that for every $s < t$,

$$2F_X(s) - 1 \leq \frac{U(t) - U(s)}{t - s} \leq 2F_X(t^-) - 1$$

hints:

(*) $2F_X(t^-) - 1 = P(X < t) - P(X \geq t)$, $2F_X(s) - 1 = P(X \leq s) - P(X > s)$

(*) Think of the function $g(x) = \frac{|x-t| - |x-s|}{t-s}$.

5. You always complain that when arriving to a line you have an extreme bad luck, and have to wait for an exceptionally long time. Denote by X_0 your waiting time at some line. Denote by $X_1, X_2, \dots$ the waiting times of other people at the same line, and suppose $X_0, X_1, \dots$ are independent and identically distributed, with continuous distribution.

You would like to find a measure for your bad luck, therefore want to know how long it will take before another person waits more than you. How long do you expect it will take? Are you really that unlucky?

CLASS EXERCISE 3

1. Find the expectation of a random variable with the following distribution function:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1/2 \\ 0.5 & 1/2 \leq x < 1 \\ 0.5 - 1/x & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Use two different methods.

2. Compute $E(Y)$ in the following cases:

(a) $X \sim \exp(\lambda)$, $Y = e^{X^2}$

(b) $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$

3. Let $g(x) = E[(X - x)^2]$, X some r.v., $x_0 = E(X) < \infty$.

Show that the minimum of $g(x)$ is reached at $x = E(X)$.

4. Part of a question from Professor Tashiro's exam (01/07/02):

Let X be an integrable r.v. and define

$$U(x) = E[X]$$

Prove that for every $x \in \mathbb{R}$

$$2E[X] - 1 \leq \frac{E[(X - U(x))^2]}{1 - U(x)} \leq 2U(x) - 1$$

Proof:

(*) $2E[X] - 1 = 1 - P(X < x) = E[X \leq x] - E[X > x] = P(X > x)$

(**) Think of the function $g(x) = \frac{E[(X - U(x))^2]}{1 - U(x)}$

3. You always complain that when arriving to a line you have an extremely bad luck, and have to wait for an exceptionally long time. Assume that X_0 your waiting time at some line. Denote by $X_1, X_2, \dots$ the waiting times of other people at the same line, and suppose $X_0, X_1, \dots$ are independent and identically distributed with continuous distribution.

You would like to find a measure for your bad luck, therefore want to know how long it will take before another person waits more than you. How long do you expect it will take? Are you really that unlucky?

4.12.08

תוחלת

$$E(X) = -\int_{-\infty}^0 F(t) dt + \int_0^{\infty} (1-F(t)) dt : F_x \text{ cdf של } X$$

אקטואל:

$$E(X) = E(Y) \iff X \sim Y \quad (1) \text{ תלות בהתפלגות}$$

$$E(X) \leq E(Y) \iff X \leq Y \quad (2) \text{ מונטון}$$

$$E(aX+b) = aE(X) + b \quad (3) \text{ ליניאריות}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx \quad f_x \text{ צפיפות של } X$$

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_x(x) dx$$

$$E(X) = -\int_{-\infty}^0 F(t) dt + \int_0^1 (1-x) dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{2} dx + \int_1^2 1 - (\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x) dx : F_x \text{ של } I \text{ בצורה 1}$$

$$E(X) = \int_0^{1/2} x \cdot 1 dx + \int_{1/2}^1 x \cdot \frac{1}{2} dx : f_x \text{ של } II \text{ בצורה 2}$$

$$E(e^{nx}) \quad 1.31 \quad X \sim \exp(\lambda) \quad (a) \quad 2$$

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot 1(x < 0)$$

$$E(e^{nx}) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot e^{nx} dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-x(\lambda-n)} dx = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda-n} & \lambda > n \\ \infty & \lambda \leq n \end{cases}$$

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad E(X^n) \quad 1.31 \quad X \sim N(0,1) \quad (b)$$

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\text{צפי}} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\text{צפי: } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \cdot \underbrace{x^n}_{\text{צפי: } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}} dx$$

$$\begin{aligned} E(X^{2k}) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}}{(-e^{-\frac{x^2}{2}})} dx \quad \begin{matrix} n=2k-1 \\ n=2k \end{matrix} \\ &= -x^{2k-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} (2k-1) x^{2k-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \end{aligned}$$

$$E(X^{2k}) = (2k-1)E(X^{2k-2}) = (2k-1)(2k-3)E(X^{2k-4}) = \dots = (2k-1)(2k-3) \dots \cdot 1$$

$$E(X^2) < \infty$$

$$g(a) = E((X-a)^2)$$

.3

$$g(a) = E((X-a)^2) = E\left[\left((X-E(X)) + (E(X)-a)\right)^2\right] =$$

$$= E[(X-E(X))^2] + 2E[(X-E(X))(E(X)-a)] + (E(X)-a)^2$$

הפונקציה $g(a)$ מינימלית ב $a=E(X)$

($Var(X)$, X היא המשתנה)

$$2F_X(s)-1 \leq \frac{u(t)-u(s)}{t-s} \leq 2F_X(t^-)-1 \quad s < t \text{ לכל } s, t, u(t)=E|X-t| \quad 4$$

$$P(X \leq s) - P(X > s) \leq \frac{E|X-t| - E|X-s|}{t-s} = E\left[\frac{|X-t| - |X-s|}{t-s}\right] \leq P(X < t) - P(X \geq t)$$

$$g(x) = \frac{|x-t| - |x-s|}{t-s} = \begin{cases} -1 & : x \geq t \\ \frac{t+s-2x}{t-s} & : t < x < s \\ 1 & : x \leq s \end{cases} \Rightarrow -1 < \frac{t+s-2x}{t-s} < 1$$

$$\underline{Z} \leq g(x) \leq \bar{Z}$$

הכלולות:

$$E(\underline{Z}) \leq E(g(x)) \leq E(\bar{Z})$$

$$\bar{Z} = \begin{cases} X \geq t & : -1 \\ X < t & : 1 \end{cases}$$

$$\underline{Z} = \begin{cases} X > s & : -1 \\ X \leq s & : 1 \end{cases}$$

$$E(\underline{Z}) \leq E(g(x)) \leq E(\bar{Z}) \quad \text{כדי} \quad \underline{Z} \leq g(x) \leq \bar{Z} \quad \text{לכל } x$$

$$-1 \cdot P(X > s) + 1 \cdot P(X \leq s) \leq E(g(x)) \leq -1 \cdot P(X \geq t) + 1 \cdot P(X < t)$$

CLASS EXERCISE 6

- ✓ 1. Prove that if X is a r.v. bounded between a and b (that is $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = 1$) then $\text{Var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$. Is this a tight bound? (Can you find $a \leq X \leq b$ with $\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{4}$?).
- ✓ 2. $Y \geq 0$ a random variable. Prove:

$$E(Y) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P(Y > n) < \infty$$

3. Let $Y \sim \exp(1)$, $X = \min(Y, 1)$.

- (a) Compute the distribution function of X and its density, if it exists.
- (b) Compute the moments generating function of X .

4. You always complain that when arriving to a line you have an extreme bad luck, and have to wait for an exceptionally long time. Denote by X_0 your waiting time at some line. Denote by $X_1, X_2, \dots$ the waiting times of other people at the same line, and suppose $X_0, X_1, \dots$ are independent and identically distributed, with continuous distribution.

You would like to find a measure for your bad luck, therefore want to know how long it will take before another person waits more than you. How long do you expect it will take? Are you really that unlucky?

5. The daily requirement for cakes in a bakery is a random variable D with d.f. F . The cost of one cake is c , and its price is p ($c < p$). The baker should decide what is the optimal number of cakes to bake every day, considering that cakes that are not sold during the day should be thrown away at the end of the day.

Let $C(y)$ be the daily profit if y cakes were baked. So -

$$C(y) = \begin{cases} pD - cy & D < y \\ py - cy & D \geq y \end{cases}$$

Assume that D is continuous, and express $E(C(y))$ as a function of y . Show that the optimal quantity to bake (gives maximum expected profit) is the solution to the equation $F(y) = 1 - \frac{c}{p}$.

11.12.08

$$\text{Var}(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

1. $p(a \leq X \leq b) = 1$

$$\left[\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2 \right]$$

$$\text{Var}(X) \leq \frac{1}{4} \quad \text{§3} \quad a=0, b=1 *$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \leq E(X) - (E(X))^2 = E(X)[1 - E(X)] \leq \frac{1}{4}$$

$\leftarrow \begin{matrix} \text{§3} \text{ } x^2 \leq x \\ 0 \leq E(X) \leq 1 \end{matrix}$

$$g(t) = t(1-t)$$

$t \in [0, 1]$

$t = \frac{1}{2}$ נקודה מקסימלית

$$0 \leq Y = \frac{x-a}{b-a} \leq 1 \quad \text{אם } a, b *$$

$$\Rightarrow \text{Var}(Y) = \text{Var}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$\left[\text{Var}(mX+n) = E((mX+n)^2) - [E(mX+n)]^2 = m^2 E(X^2) + 2mnE(X) + n^2 \right.$$

$$m^2 E(X^2) + 2mnE(X) + n^2 - m^2 (E(X))^2 - 2mnE(X) - n^2 =$$

$$= m^2 [E(X^2) - (E(X))^2] = m^2 \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{cases} a & p = \frac{1}{2} \\ b & p = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{נקודה}$$

$$\left(\text{Var}(X) = E(X - E(X))^2 \leq E\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \leq \frac{1}{4}, \quad g(a) = E[(X-a)^2] \right. \quad \text{אם } X \text{ מתפלגת ב-} \frac{a+b}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(Y > n) < \infty \Leftrightarrow E(Y) < \infty, \quad Y \geq 0 \quad 2$$

$$\left(E(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y > n) \quad \text{זכר } 0, 1, 2, \dots \quad \text{אם } Y \text{ היא מקבלת ערכים} \right)$$

$$(X = \lceil Y \rceil \Rightarrow \text{אם } Y \text{ היא מקבלת ערכים שלמים}) \quad Z \leq Y \leq Z+1 \quad \text{אם } Z = \lfloor Y \rfloor$$

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Z > n)$$

$$E(Z+1) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} P(Z > n)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(Z > n) < \infty \Leftrightarrow E(Y) < \infty \quad \text{אם}$$

$$P(Z > n) \leq P(Y > n) \leq P(Z+1 > n) \quad \text{אם } Z \leq Y \leq Z+1$$

$$\sum P(Y > n) < \infty \Leftrightarrow \sum P(Z > n) < \infty \quad \text{אם}$$

הוכחה (האקס 3)

1. X היא נקודה של $t > 0$ עבור $M_X(t)$ קיים, $a \in \mathbb{R}$ אם:

$$P(X \geq a) \leq \frac{M_X(t)}{e^{ta}}$$

הוכחה:

$$P(X \geq a) = P(Xt \geq at) = P(e^{Xt} \geq e^{at}) \leq$$

$$\left[P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a} \right]$$

אם $a \geq 0, X \geq 0$: איקו

$$\leq \frac{E(e^{xt})}{e^{at}}$$

(ב) נשתמש בתוצאה (א) כדי למצוא חסם דרוק, כל עוד, אינסופיות

$a \in (p, 1)$, $S_n \sim \text{Bin}(n, p)$ לכן, $P(S_n \geq na)$

$$P(S_n \geq na) \leq \frac{M_{S_n}(t)}{e^{t na}}$$

$$\begin{aligned} [M_{S_n}(t) = E(e^{S_n t})] &= \sum_{k=0}^n P(S_n=k) e^{kt} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{kt} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} (e^t p)^k = (1-p + p e^t)^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(S_n \geq na) \leq \frac{(1-p + p e^t)^n}{e^{t na}}$$

4. $X_0, X_1, X_2, \dots$ סדרה, זרימים.

N : האינדקס הראשון n כך $X_n > X_0$. $E(N)$?

$$P(N > n) = P(X_0, X_1, \dots, X_n \text{ אינם חוצים את } X_0) = \frac{1}{n+1}$$

$$E(X) = \sum \frac{1}{n+1} = \infty$$

CLASS EXERCISE 7

✓ 1. A point X is chosen randomly in the interval $(0, 1)$. Let U be the length of the shorter interval between $(0, X)$ and $(X, 1)$, V the length of the longer. Find $F_{U,V}$.

✓ 2. Are the following assertions true:

✓ (a) If X or Y have no atoms then (X, Y) has no atoms.

✓ (b) If (X, Y) has no atoms then X and Y have no atoms.

3.
 $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(1-x-y) & x > 0, y > 0, x+y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
 $c, 0 \leq x, y \leq 1$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(1-x-y) & x > 0, y > 0, x+y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

Is the 2-dimensional density of a random vector (X, Y) .

✓ (a) Find the constant c .

(b) Find the marginal densities f_X and f_Y .

✓ (c) Find $P(X < Y/2)$, $P(X < Y)$.

(d) Compute $E(XY)$, $E(X+Y)$.

4. X, Y random variables with joint density $f(x, y) = 1_{(0,1) \times (0,1)}(x, y)$. Let $Z = XY$.

(a) Compute $E(Z)$.

(b) Find the density of Z .

5. Let $f_{X,Y}$ be a 2-dimensional density and assume $f_{X,Y}$ is continuous at the point (x_0, y_0) . Prove -

$$f_{X,Y}(x_0, y_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\epsilon^2} P(x_0 - \epsilon \leq X \leq x_0 + \epsilon, y_0 - \epsilon \leq Y \leq y_0 + \epsilon)$$

CLASS EXERCISE 7

1. A vector $\mathbf{z}$ is shown, indicating the normal $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$. Let $\mathbf{v}$ be the vector of the shortest interval between $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ and $(\mathbf{a}, \mathbf{d})$. Find the width of the region. (Hint: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{z} = 0$.)

2. Give the following matrix the I/O:

- (a) If $\mathbf{Y}$ or $\mathbf{Z}$ have no common factor $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ but are close.
 (b) If $(\mathbf{b}, \mathbf{c})$ has no common factor $\mathbf{Z}$ and $\mathbf{Y}$ have no common.

$$-k(y \leq z) = \begin{cases} 0 & \text{if } z > 0 \text{ and } y < 0 \\ 1 & \text{else} \end{cases}$$

is the difference in density of a function $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

(a) Find the constant $\mathbf{z}$.

(b) Find the marginal densities $\mathbf{f}_X$ and $\mathbf{f}_Y$.

(c) Find $\mathbf{P}(\mathbf{X} < \mathbf{Y})$, $\mathbf{P}(\mathbf{X} < \mathbf{Y})$.

(d) Compute $\mathbf{E}(\mathbf{X} \mathbf{Y})$, $\mathbf{E}(\mathbf{X} \mathbf{Y} + 1)$.

3. $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ random variables with joint density $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}_X(\mathbf{x})\mathbf{f}_Y(\mathbf{y})$. Let $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \mathbf{Y}$.

(a) Compute $\mathbf{E}(\mathbf{Z})$.

(b) Find the density of $\mathbf{Z}$.

4. Let $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ be a bivariate density and assume $\mathbf{f}_X$ is continuous at the point

(a) $\mathbf{f}_X(\mathbf{a})$.

$$\mathbf{f}_X(\mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{1}{\mathbf{h}} \mathbf{P}(\mathbf{a} - \mathbf{h} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{a} + \mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}_X(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - \mathbf{F}_X(\mathbf{a} - \mathbf{h})}{2\mathbf{h}}$$

18.12.08

(X,Y) נחלק על, נחלק על -19

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

$$0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1 \quad (1) \quad \text{נכונות}$$

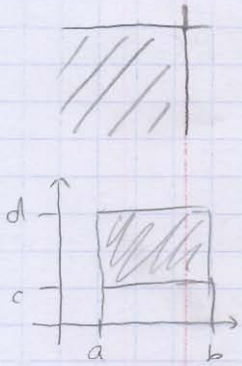
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F_{X,Y}(x,y) = 1 \quad (3)$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \lim_{\substack{x_n \rightarrow x \\ y_n \rightarrow y}} F_{X,Y}(x_n, y_n) \quad (4)$$

$$\exists c, c \leq d, a \leq b \quad (5)$$

$$F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c) \geq 0$$



$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) -$$

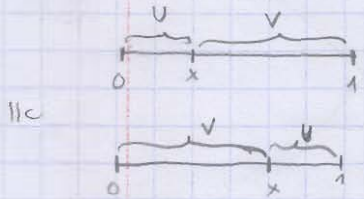
$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(x,t) dt \quad \text{כל } f_{X,Y} \text{ נכונות } (x,y) \text{ ב-}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy \quad \text{כל}$$

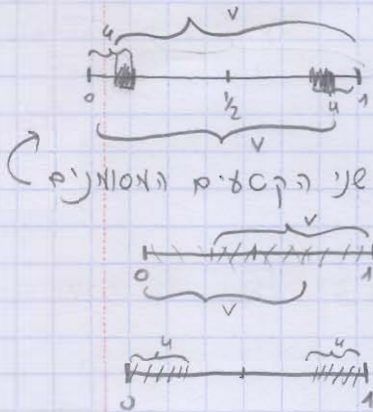
$$E[g(x,y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy \quad \text{כל נכונות } (x,y) \text{ ב-}$$

$$X \sim U(0,1) \quad .1$$

$$1/2 \leq V < 1, 0 < U \leq 1/2$$



$$F_{U,V}(u,v) = P(U \leq u, V \leq v) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ 1 & u \geq 1/2 \\ 0 & v < 1/2 \\ 2(u+v-1) & 0 \leq u < 1/2 \text{ and } 1/2 \leq v < 1 \\ 2v-1 & u \geq 1/2 \text{ and } 1/2 \leq v < 1 \\ 2u & 0 \leq u < 1/2 \text{ and } v \geq 1 \\ 2u & u \geq 1/2 \text{ and } v \geq 1 \end{cases}$$



$$u < 0 \text{ כל } v < 1/2$$

$$u \geq 1/2 \text{ כל } v \geq 1$$

$$0 \leq u < 1/2 \text{ כל } 1/2 \leq v < 1 \text{ כל } u+v < 1$$

$$0 \leq u < 1/2 \text{ כל } 1/2 \leq v < 1 \text{ כל } u+v \geq 1$$

$$u \geq 1/2, 1/2 \leq v < 1,$$

$$0 \leq u < 1/2, v \geq 1$$

נכונות נכונות

$$F_U(u) = \lim_{v \rightarrow +\infty} F_{U,V}(u,v) = \begin{cases} 0 & u < 0 \\ 2u & 0 \leq u < 1/2 \\ 1 & u \geq 1/2 \end{cases}$$

$$F_V(v) = \lim_{u \rightarrow +\infty} F_{U,V}(u,v) = \begin{cases} 0 & v < 1/2 \\ 2v-1 & 1/2 \leq v < 1 \\ 1 & v \geq 1 \end{cases}$$

$$U \sim U(0, 1/2)$$

$$V \sim U(1/2, 1)$$

2. הארה: $P(X=x_0, Y=y_0) > 0$ אם (x, y) של (x_0, y_0) אם (x_0, y_0) הוא נקודה.

$$P(X=x_0, Y=y_0) \leq P(X=x_0), P(Y=y_0)$$

אכן אף נכון.

הוא לא נכון. ארבע הנסיגות הם (צירי) אחת $w \in (0, 1/2)$

$$Y(w) = \begin{cases} w & w \in (0, 1/2) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$P(X=0) = 1/2 = P(Y=0)$$

(0 הוא נקודה של X ו- Y)

$$P(X=0, Y=0) = 0$$

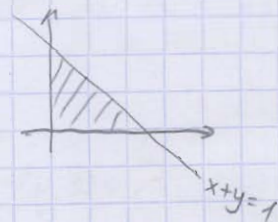
אלה:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy =$$

$$1 = \int_0^1 \int_0^{1-x} c(1-x-y) dy dx =$$

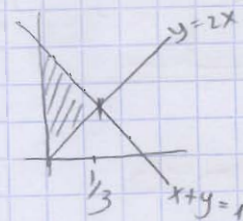
$$P(X < Y/2) = \int_0^{1/3} \int_{2x}^{1-x} 6(1-x-y) dy dx =$$

$$= 1/3$$



3. (a)

וקדם $c=6$



(c)

$$P(X < Y) = 1/2 \quad \text{ס'ארת}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \frac{1}{(0,1)}(x) \int_0^{1-x} 6(1-x-y) dy$$

(b) צפיפות שולית:

$$f_Y(y) = \text{אות דבר, רק אח'ים x ה-y}$$

הערה על שאר 3, ש'ה: הוא ל צפיפות

CLASS EXERCISE 8

1. Let $X_1, X_2, \dots$ be i.i.d random variables distributed $U(0, 1)$.
 - (a) Prove that $P(X_1 < X_2 < X_3 < x) = \frac{x^3}{6}$.
 - (b) Are the r.v. $Y = \max(X_1, \dots, X_{10})$ and the event $A = \{X_1 < X_2 < \dots < X_{10}\}$ independent?
2.
 - (a) $Y \sim \exp(\mu), X \sim \exp(\lambda)$ independent r.v's. Find $P(X < Y)$.
 - (b) $X_1, \dots, X_n$ independent, $X_i \sim \exp(\lambda_i)$, $T = \min_{1 \leq i \leq n}(X_i)$. Find the distribution of T .
 - (c) For $n = 2$, let I be s.t. $X_I = T$ (the index of the minimum).
Prove that T, I are independent.
3. Let $A_1, A_2, \dots$ be a sequence of events, $\{c_n\}$ a sequence of real numbers s.t.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$. Define $X_n = c_n \mathbb{I}_{A_n}$.
 Find necessary and sufficient conditions for $X_n \rightarrow 0$ almost surely and in probability.
4. $X_1, X_2, \dots$ i.i.d random variables, $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$.
 Does $E|X_1| < 1$ imply that $Y_n \rightarrow 0$ a.s?
5. $X_1, X_2, \dots$ i.i.d random variables.
 If $E(X_1) < \infty$, what can we say about $P(\frac{X_n}{n} \rightarrow 0)$?
6. Prove that if X_n converges to X in probability, then there is a subsequence X_{n_k} that converges to X almost surely.

CLASS EXERCISE 8

1. Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be i.i.d. random variables distributed $N(\mu, \sigma^2)$.
 - (a) Show that $P(X_1 < X_2 < \dots < X_n) = \frac{1}{n!}$.
 - (b) Assume that $Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ and the event $A = \{X_1 < X_2 < \dots < X_n\}$ is independent of Y . Find $P(A)$.
 - (c) For a fixed t let $X_t = Y$ (the index of the maximum). Show that (X_t) are independent.
2. Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be a sequence of i.i.d. $N(0, 1)$ random variables.
 - (a) Show that $X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent.
 - (b) Show that $X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent.
 - (c) Show that $X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent.
3. Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be a sequence of i.i.d. $N(0, 1)$ random variables.
 - (a) Show that $X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent.
 - (b) Show that $X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent.
 - (c) Show that $X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent.
4. Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be a sequence of i.i.d. $N(0, 1)$ random variables.
 - (a) Show that $X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent.
 - (b) Show that $X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent.
 - (c) Show that $X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent.
5. Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be a sequence of i.i.d. $N(0, 1)$ random variables.
 - (a) Show that $X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent.
 - (b) Show that $X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent.
 - (c) Show that $X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent.
6. Prove that if $X_1, X_2, \dots, X_n$ are i.i.d. $N(0, 1)$ random variables, then there are subsequences X_{n_k} that converge to X almost surely.

קבוצות A, B

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B) \quad \text{אם } X, Y \text{ בלתי תלויים}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) \iff X, Y \text{ בלתי תלויים}$$

$$X, Y \text{ בלתי תלויים} \iff f_X(x), f_Y(y) \text{ הם צפיפותות } f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$f_{X,Y}(x,y) = g(x)h(y) \quad \text{אם } X, Y \text{ בלתי תלויים}$$

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad *$$

$$0 < x < 1$$

$$P(X_1 < X_2 < X_3 < x) = \frac{x^3}{6}$$

ד"ר א. (1)

הוכחה: ב. סימטריה, ולכן $P(X_1 < X_2 < X_3 < x) = P(X_2 < X_1 < X_3 < x) = \dots$

$$x^3 = P(X_1 < x, X_2 < x, X_3 < x) = \sum_{\text{כל הצירופים}} P(X_i < x_j < x_k < x) =$$

$$= 6P(X_1 < X_2 < X_3 < x) \implies P(X_1 < X_2 < X_3 < x) = \frac{x^3}{6}$$

ב. אם A, Y בלתי תלויים $\iff 1_A, Y$ בלתי תלויים?

$$P\left(\underbrace{1_A=1}_A, Y \leq t\right) = P(X_1 < X_2 < \dots < X_{10} \leq t) = \frac{t^{10}}{10!}$$

$$P(A) = \frac{1}{10!}$$

$$P(Y \leq t) = P(X_1 \leq t, \dots, X_{10} \leq t) = t^{10} \quad \left. \vphantom{P(Y \leq t)} \right\} \implies \frac{t^{10}}{10!}$$

אם A ו- Y בלתי תלויים.

2. $a. X \sim \exp(\lambda), Y \sim \exp(\mu)$. מהו $P(X < Y)$?

(האנטיצידה היא $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$)

$$\left(\frac{5}{8} = \frac{5}{3+5}\right)$$

3 אינטים מסוג ב' בחיבת זמן
5 אינטים מסוג א' בחיבת זמן
מה היסודי לזמן א' ולזמן ב' יחד לפני אינט מסוג ב'

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$f_Y(y) = \mu e^{-\mu y}$$

לכל $x, y \geq 0$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

$$P(X < Y) = \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y} dy dx = \int_0^\infty \lambda e^{-x(\lambda + \mu)} dx = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

lim sup, lim inf

$A_1, A_2, \dots$

קולקציה

$$\limsup A_n = \{\omega \mid A_n \text{ infinite often } \omega\} = \{A_n \text{ infinite often}\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$$

$$\liminf A_n = \{\omega \mid \text{לבסוף תמיד } A_n \text{ } \omega\} = \{A_n \text{ eventually}\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$$

$$\liminf A_n \subseteq \limsup A_n \quad *$$

$$(\liminf A_n)^c = \limsup A_n^c \quad *$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 0 \quad (\text{I}) \text{ גורס קולקציה}$$

$$P(X_n \rightarrow X) = 1 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \varepsilon \text{ i.o.}) = 0 \quad X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad X_n \xrightarrow{P} X \text{ "בפרובאביליטי"} *$$

$$X_n \xrightarrow{P} 0 \text{ ו} X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \text{ הם שני דברים שונים. 3.}$$

$$\text{a.s.: } X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} 0 \iff P(C_n 1_{A_n} \rightarrow 0) = 1 \iff$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(C_n 1_{A_n} > \varepsilon \text{ i.o.}) = 0 \iff$$

$$P(1_{A_n} > \varepsilon / C_n \text{ i.o.}) = \boxed{P(A_n \text{ i.o.}) = 0}$$

$$P: X_n \xrightarrow{P} 0 \iff P(C_n 1_{A_n} > \varepsilon) \rightarrow 0 \iff$$

$$P(1_{A_n} > \varepsilon / C_n) = \boxed{P(A_n) \rightarrow 0}$$

$$\liminf A_n = (\limsup A_n^c)^c$$

כאן

$$P(\liminf A_n) = 1$$

שאלה: אם מוכיח

$$P(\limsup A_n^c) = 0$$

(כאן)

$$U(A_n)^c = \cap A_n^c$$

הוכחה: שאלה ב-אורזן:

$$\cap (A_n)^c = U A_n^c$$

$$(\limsup A_n^c)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c \right) \right)^c =$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^c \right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \liminf A_n$$

שאלה של מורה קנטר (BCT)

1. יהיו $A_1, \dots, A_n, \dots$ מאורעות. אם $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) < \infty$ אז $P(\limsup A_n) = 0$

2. $P(\limsup A_n) = 1 \iff \sum P(A_i) = \infty$, במשפט השני, הוכיח

תרגיל: (X_n, Y_n) נבחרים מתפלגות אחידה במעגל $\{X_n^2 + Y_n^2 \leq r_n^2\}$

$\{r_n\}$ סדרה. נסתכל על הקבוצה $A_n = \{X_n^2 + Y_n^2 \leq 100\}$

$\stackrel{1}{\approx}$ אם הסכימי A סופית בהינתן $r_n = n$

$\stackrel{2}{\approx}$ אם הסכימי A $r_n = \sqrt{n}$

$$(X_n, Y_n) \sim \text{circle}$$

סתמי

$$A_n = \{X_n^2 + Y_n^2 \leq 100\} \stackrel{1}{\approx} \text{אם } n \text{ סופית}$$

$$(X_n, Y_n) \sim \text{circle} \iff \omega \in \limsup A_n \iff |A(\omega)| = \infty$$

$$P(A_n) = \frac{\text{שטח המעגל}}{\text{שטח המעגל}} = \frac{\pi(10)^2}{\pi n^2} = \frac{100}{n^2}$$

$$\sum_{n=10}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=10}^{\infty} \frac{100}{n^2} < \infty$$

$P(\limsup A_n) = 0$ אם $P(A_n) = 0$

כלומר A סופית בהסתברות אחידה.



$$P(A_n) = \frac{100}{n^2}$$

$$\sum P(A_n) = \infty$$

$(X_n, Y_n) \sim A_1, \dots, A_n$

$$P(|A| = \aleph_0) = P(\limsup A_n) = 1$$

אוסף סדרה $\sum$: נסתר נקודה (X_n, Y_n) הנתפסות אחידה באלהם היחידה

$$A = \{n \mid \frac{1}{n} \leq X_n^2 + Y_n^2 \leq \frac{1}{n}\} \quad \text{אם } n \geq 1 \quad \text{אם } n \geq 1$$

$$Y_n = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n \quad \text{ע"פ } X_1, X_2, \dots$$

$$(Y_n \xrightarrow{a.s.} 0) \quad P(Y_n \rightarrow 0) \quad \text{אם } E(|X_1|) < 1$$

$$P(Y_n \rightarrow 0) = P(\forall \varepsilon > 0, \exists n \mid Y_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq N)$$

ברוך מוצא $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ובראות $\{ |X_n| \geq \varepsilon_n \}$ קורה אף סוף

פגמים a.s. נסמן $E|X_1| = a$ נקח $\delta > 0$ כך $a + \delta < 1$

$$A_n^c = \{ |X_n| > (a + \delta)^n \} \quad \text{אם } \frac{a - \delta}{2} \quad \text{אם } \frac{a - \delta}{2}$$

$$P(|Y_n| > (a + \delta)^n) \leq \frac{E|Y_n|}{(a + \delta)^n} = \frac{\prod_{k=1}^n E|X_k|}{(a + \delta)^n} =$$

$$= \frac{a^n}{(a + \delta)^n} = \left(\frac{a}{a + \delta} \right)^n \rightarrow 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|Y_n| > (a + \delta)^n) < \infty$$

וכן

$$0 = P(|X_n| \geq (a + \delta)^n \text{ infinitely often})$$

$$\{ \exists N, \forall n \geq N, |Y_n| < (a + \delta)^n \}^c = \{ |Y_n| \geq (a + \delta)^n \text{ i.o.} \}$$

ע"פ

$$X_i \sim N(0, 1) \quad X_1, X_2, \dots$$

תכונה יחיד

$$P(\exists N, \forall n \geq N, \max \{ X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_n \} \geq 3) = 1$$

א

$$P(\exists N, \forall n \geq N, \max \{ X_{n+1}, \dots, X_{n+20} \} \geq 3) = 1$$

ב

$$P(\liminf \{ \max \{ X_{n+1}, \dots, X_{2n} \} \geq 3 \}) = 1$$

הנחה א

$$P(\limsup \{ \max \{ X_{n+1}, \dots, X_{2n} \} \leq 3 \}) = 0$$

הנחה ב

$$P(X_k \leq 3, \forall k = n+1, \dots, 2n) = \prod_{k=n+1}^{2n} P(X_k \leq 3) = \Phi(3)^n \rightarrow 0 \quad (\Phi(3) < 1)$$

$$\sum P(\max \{ X_{n+1}, \dots, X_{2n} \} \leq 3) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(3)^n < \infty$$

$$P(\max \{ X_{n+1}, \dots, X_{2n} \} \leq 3) = 0$$

←

$$P(\max \{ X_{n+1}, \dots, X_{n+20} \} \leq 3) = \Phi(3)^{20} = \infty! \quad \text{אם } \Phi(3) > 1$$

→

$$\sum P(A_n) = \infty$$

A_n, A_{n+1} תלויים (כך) ואכן לא ניתן לאמר ישירות

A_1, A_{21}, A_{41} אינן תלויות

אם נקח קבוצות של 20

$$\sum P(A_{20(n-1)+1}) = \infty \quad \Rightarrow P(\limsup A_{20(n-1)+1}) = 1$$

ישרית
1/2/20

אי שיוויון מרקוב:

אם X משתנה מקרי כד ש- $E|X| < \infty$ אזי לכל a :

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E|X|}{a}$$

הוכחה : $\varphi(x) = |x|1_{(|x| \geq a)}$, אזי כיוון ש- $a1_{(|x| \geq a)} \leq \varphi(x) \leq |x|$:

$$E|X| \geq E(a1_{(|x| \geq a)}) = aE(1_{(|x| \geq a)}) = aP(|X| \geq a)$$

נחלק ב- a ונקבל:

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E|X|}{a}$$

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \right)$$

PHYSICS DEPARTMENT

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \right)$$

PHYSICS DEPARTMENT

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \right)$$

- | | |
|--|---|
| $\forall \epsilon > 0 \quad P(X_n - X > \epsilon) \longrightarrow 0$ | $X_n \xrightarrow{P} X$ בהסתברות (1) |
| $d(X_n, X) = E X_n - X \longrightarrow 0$ | $X_n \xrightarrow{L^1} X$ בתוחלת (2) |
| $E X_n - X ^2 \longrightarrow 0$ | $X_n \xrightarrow{L^2} X$ בתוחלת בהסבול (3) |
| $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n - X = 0) = 1$ | $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ נאמט-תמיד (4) |

תרגיל

יהי $A_1, A_2, \dots$ מאורעות וסדרה $\{C_n\}$ כך $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \infty$ וכן $C_n > 0$.
אז מהסתברות ההתכנסות תמידית וחספס $X_n = C_n 1_{A_n} \xrightarrow{?} 0$ לבקש

(1) בהסתברות $\forall \epsilon > 0 \quad P(|C_n 1_{A_n}| > \epsilon) \longrightarrow 0 \iff C_n 1_{A_n} \xrightarrow{P} 0$

$$P(C_n 1_{A_n} > \epsilon) = P(1_{A_n} > \frac{\epsilon}{C_n}) = P(A_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\substack{C_n \rightarrow \infty \\ \frac{\epsilon}{C_n} < 1}} 0$$

תמידית וחספס $P(A_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

(2) $C_n P(A_n) = E|C_n 1_{A_n}| \longrightarrow 0 \iff X_n \xrightarrow{L^1} 0$

(3) $E(C_n 1_{A_n})^2 = C_n^2 P(A_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff X_n \xrightarrow{L^2} 0$

(4) $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$ כל אופנים $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = 0) = 1$ מוכחים $\epsilon_n > 0$ וחספס

$B_n = \{X_n > \epsilon_n\}$ ומוכיחים $\sum P(B_n) < \infty$ מוכיח קריטריון $P(B_n \text{ i.o.}) = 0$

$P(B_n) = P(C_n 1_{A_n} > \epsilon_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\substack{C_n \rightarrow \infty \\ \epsilon_n > 0}} P(A_n)$

תמיד חספס: $\sum P(A_n) < \infty$

אם $A_1, A_2, \dots$ בדרגה אחת תמידית וחספס

אם אפשר למצוא תמידית וחספס לכל המקרים

$A_n = \{0 < X < \frac{1}{n}\}$, $X \sim U(0,1)$, $C_n = n$

$\forall \epsilon > 0 \quad P(|C_n 1_{A_n}| > \epsilon) = \frac{1}{n} = P(X < \frac{1}{n}) \longrightarrow 0$
כל תמידית וחספס

$X_n \xrightarrow{a.s.} 0$

$\sum P(A_n) = \sum \frac{1}{n} = \infty$

$X_n \xrightarrow{L^1} 0$ כן, אבל $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$ לא

$E(X_n) = E(n \cdot 1_{A_n}) = 1 \not\longrightarrow 0$

חספס: $a.s.$ לא! L^1 לא קלושה בדרגה אחת.

משפט ההתכנסות הממוצעת

$X_n \xrightarrow{a.s.} x$ ונניח קיים גבול Y כן, E :

$$E|Y| < \infty \quad (1)$$

$$|X_n|, |X| < Y \quad (2) \quad (Y \text{ פונקציה})$$

$$E(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(X) \quad (3)$$

חוק הממוצעת הממוצעת

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{P, L^2} E(X_1) = \mu \quad \text{כל } E|X_1|^2 < \infty \text{ כן } i.i.d. \quad X_1, X_2, \dots \quad (4)$$

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{P} \mu \quad \text{כל } E|X_1| < \infty \quad (5)$$

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{L^1} \mu \iff \frac{1}{n} S_n \xrightarrow{a.s.} \mu = E(X_1)$$

$$\frac{1}{n} S_n \xrightarrow{a.s.} E(X_1) = \mu \iff$$

$$\frac{1}{n} S_n - \mu \xrightarrow{a.s.} 0 \quad \text{הוכחה:}$$

$$|\frac{1}{n} S_n - \mu| \leq \frac{1}{n} |S_n| + |\mu| \leq (\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |X_k|) + |\mu| = Y$$

$$E(Y) = \frac{1}{n} \sum E|X_k| + |\mu| = \alpha + |\mu| < \infty$$

$$E|\frac{S_n}{n} - \mu| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(0) = 0 \quad \text{משפט ההתכנסות הממוצעת}$$

$$Y_n = \prod_{i=1}^n X_i \quad \text{כל } X_i \sim U(0,1) \quad i.i.d. \quad X_1, X_2, \dots \quad \text{כל } Y_n$$

$$Y_n^{1/n} \xrightarrow{a.s.} \alpha \quad \text{כל } \alpha \quad (6)$$

$$E(Y_n^{1/n})? \quad (7)$$

$$Y_n^{1/n} = \prod_{i=1}^n X_i^{1/n}$$

$$\ln Y_n^{1/n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \quad \text{כל } Y \text{ ממוצע, } \ln \text{ פונקציה}$$

$$E|Z_n| = E|\ln(X_n)| = \int_0^1 |\ln(x)| dx \quad (\ln(X_n) = Z_n)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\ln(x)| f_X(x) dx = \int_0^1 |\ln(x)| dx = 1 \quad (f_X(x) = 1_{(0,1)})$$

$$= \int_0^1 -\ln(x) dx = x - x \ln x \Big|_0^1 = 1$$

$$Z_1, Z_2, \dots \text{ הם פונקציות } f(X_i) \text{ כל } X_i \text{ פונקציה}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(X_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(\ln(X_1)) = -E|\ln(X_1)| = -1$$

$$e^{-1} \text{ כל } e \text{ כל } 1$$

$$Y_n^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-1} \quad (\lim e^{\ln(Y_n^{1/n})} = e^{\lim \ln(Y_n^{1/n})})$$

$$E(1) < \infty, \quad Y_n^{1/n} \leq 1 \quad (a)$$

$$E(Y_n^{1/n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(e^{-1}) = e^{-1}$$

$$E(Y_n^{1/n}) = E\left(\prod_{i=1}^n X_i^{1/n}\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i)^{1/n}$$

כאשר יותר פשוט לחשב ישירות:

$$E(X_1)^{1/n} = \int_0^1 x^{1/n} dx = \left[\frac{1}{\frac{1}{n}+1} x^{\frac{1}{n}+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\frac{1}{n}+1}$$

$$\Downarrow \\ E(Y_n^{1/n}) = \left(\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = e^{-1}$$

תרגיל: אינטגרציה Monte Carlo (מחשבת וחסוך החשבון)

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ מציבה, כך ש- } \int_0^1 |f(x)| dx < \infty$$

$$I_n = \frac{1}{n} (f(u_1) + f(u_2) + \dots + f(u_n)) \text{ ו- } u_i \sim U(0,1), \text{ i.i.d. } u_1, u_2, \dots$$

$$I_n \xrightarrow{a.s.} I = \int_0^1 f(x) dx = e \quad (a) \text{ חסא}$$

$$P(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}) \text{ } \delta \text{ } \text{non} \text{ } \text{van} \text{ } \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty \quad (b)$$

פתרון

$$\text{p.d.f. } E(f(u_i)) = \int_0^1 f(x) dx \xrightarrow{a.s.} \text{i.i.d. } f(u_1), f(u_2), \dots \quad (1)$$

$$I_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(u_i) \longrightarrow \int f(x) dx = E(f(u_i)) \text{ מחזור החשבון}$$

$$E(I_n - I) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Var}(I_n - I) = \text{Var}(I_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(f(u_i)) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E(f(u_i))^2 =$$

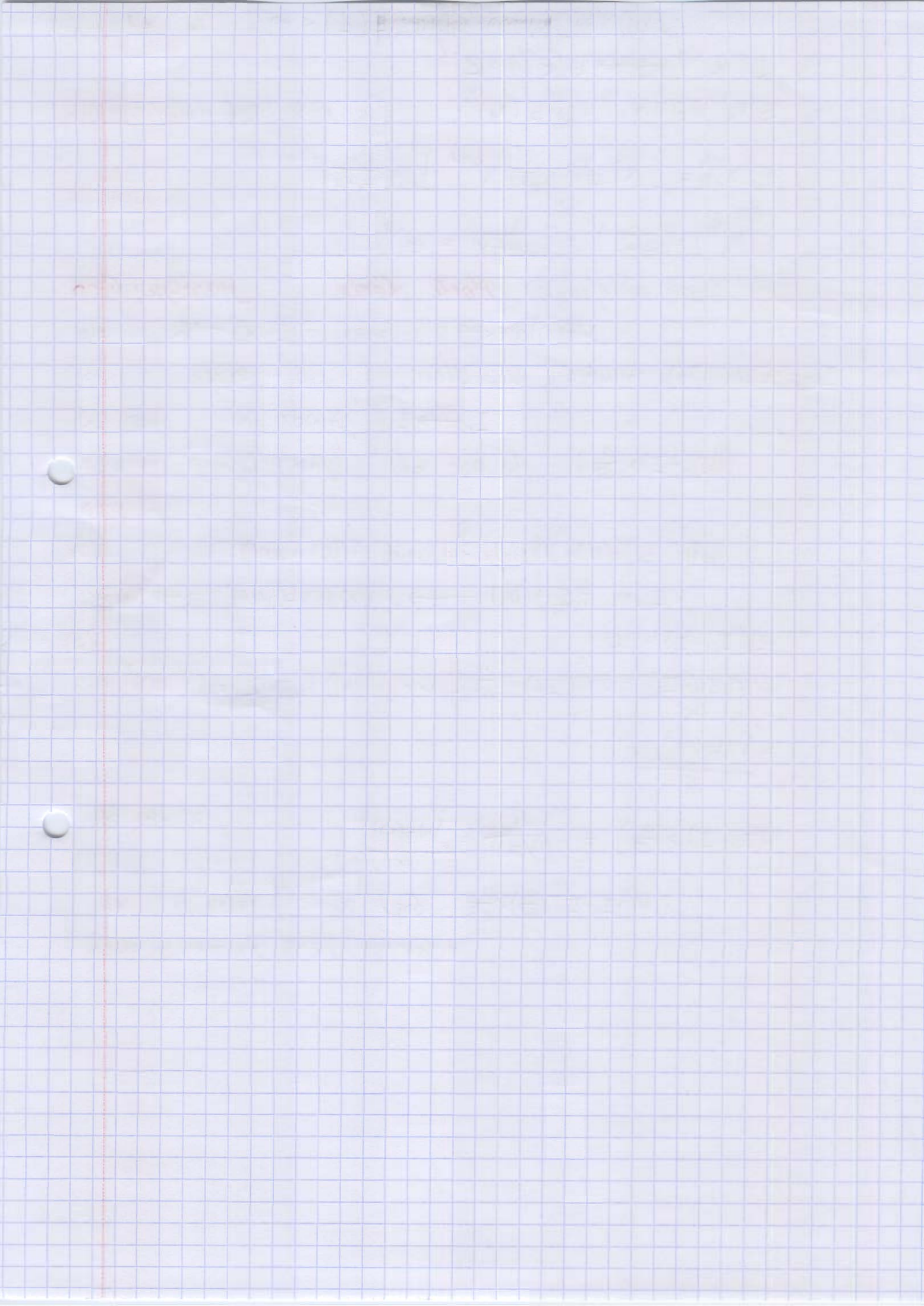
$$= \frac{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}{n}$$

$$P(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}) \leq \frac{\text{Var}(I_n)}{(a/\sqrt{n})^2} = \frac{\int_0^1 |f(x)|^2}{a^2}$$

לפי צב. 3.10

$$P(|I_n - I| > \frac{a}{\sqrt{n}}) < \frac{1}{c^2} \text{ } \delta \text{ } a = c \int_0^1 |f(x)| dx \text{ } \text{כאשר}$$

הטלה זו נשמרת אחר פונקציה חלקה.



15.1.08

הוכחה של קרוקר

אם $a_n \rightarrow \infty$ (סדרה מונוטונית עולה מאינסוף) כך $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{a_n} < \infty$

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

משפט ציגורי

אם $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ קיים, ו $a_n \rightarrow \infty$ כך $b \rightarrow b$ אז $L_n = \sum_{k=1}^n \frac{(a_k - a_{k-1})}{a_n} b_k \rightarrow b$ $a_0 = 0$

$$\sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 = a_n$$

אם a_k קבוע-עולה קרוקר

$$b - \varepsilon < b_k < b + \varepsilon \quad b - \varepsilon < L_n < b + \varepsilon$$

אם $\sup b_k$ קיים כי b_k סדרה מתכנסת.

בוסתן הוכחה

$$a_0 = 0, b_0 = 0$$

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a_k} \rightarrow b_{\infty} \quad (\text{ניתן לבחור מתקן})$$

$$a_n(b_n - b_{n-1})$$

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n [a_k (b_k - b_{k-1})] =$$

$$= \frac{1}{a_n} \left[\sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^n a_k b_{k-1} \right] =$$

$$= \frac{1}{a_n} \left[a_n b_n + \sum_{k=2}^n a_{k-1} b_{k-1} - \sum_{k=2}^n a_k b_{k-1} \right] =$$

$$= b_n - \frac{1}{a_n} \left[\sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) b_{k-1} \right] \rightarrow b_{\infty} - b_{\infty} = 0$$

$\downarrow$ b_{∞} $\downarrow$ b_{∞} (ציגורי)

משפט 1: תנאי מספיק להתכנסות סדרה (קרוקר)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{var}(x_i) < \infty \quad \text{כך} \quad x_1, x_2, \dots \quad \text{נניח}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \quad \text{כך} \quad \text{מתכנס ב-1.}$$

משפט שולר הסדרות של קראטצ'ולד: תנאי הכרחי ומספיק

$$Y_i = X_i \mathbb{1}_{(X_i \leq A)} \quad \text{יהי} \quad x_1, x_2, \dots \quad \text{סדרה מונוטונית עולה} \quad A > 0 \quad \text{שלילי. נשקף}$$

$$\sum X_i \quad \text{מתכנס ב-1} \quad \text{אם} \quad \sum P(X_i > A) < \infty \quad (א)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} E(Y_i) < \infty \quad (ב) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \text{Var}(Y_i) < \infty \quad (ג)$$

סדרה $X_1, X_2, \dots$ נצטרך $X_1, X_2, \dots$ בדרך זו.

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n^2}$$

$$P(X_n = \frac{1}{n}) = P(X_n = -\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$$

(כא) $\sum X_i$ מתכנס בדרך.

פיתרון: נבדוק את תנאי אלטר הסדרות: יהי $A > 0$

(כ) $P(|X_n| > A) \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} P(X_n = n) + P(X_n = -n) = \frac{1}{n^2}$

ולכן $\sum P(|X_n| > A)$ מתכנס.

(ג) $E(X_i \mathbb{1}_{\{|X_i| \leq A\}}) = 0 < \infty \Rightarrow \sum E(Y_i) = 0 < \infty$

(ד) $Var(Y_i) = Var(X_i \mathbb{1}_{\{|X_i| \leq A\}}) \stackrel{E(Y_i)=0}{=} E(Y_i^2) =$
 $\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n^2} [P(X_i = \frac{1}{n}) + P(X_i = -\frac{1}{n})] \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum Var(Y_i) < \infty$

מסקנה: שאלת תנאי אלטר הסדרות מתקיימת ולכן $\sum X_i$ מתכנס בדרך.

סדרה: יהי $X_1, X_2, \dots$ כך ש- $E(X_i) = 0, Var(X_i) = c < \infty$

אזי לכל $\varepsilon > 0$ $\frac{1}{\sqrt{n} (\ln n)^{1+\varepsilon}} S_n \xrightarrow{a.s.} 0$

(תוצאות: $\frac{S_n}{\sqrt{n Var(X_i)}} \rightarrow X \sim N(0, 1)$ אלטר CLT)

הוכחה: נצטרך $a_n = \sqrt{n} (\ln n)^{1+\varepsilon}$ ונסתכל על $\frac{X_1}{a_1}, \frac{X_2}{a_2}, \dots$

$$Var(\frac{X_i}{a_i}) = \frac{1}{a_i^2} \cdot Var(X_i) = \frac{c}{a_i^2}$$

$$\sum_{i=1}^n Var(\frac{X_i}{a_i}) = \sum_{i=1}^n \frac{c}{a_i^2} = \sum_{k=1}^n \frac{c}{k \ln(k)^{1+2\varepsilon}} < \infty \quad (\sum \frac{1}{k \ln k^{1+a}} \xrightarrow{a>0} \text{ מתכנס})$$

לכן לפי אלטר 1 נקבל $\sum \frac{X_i}{a_i}$ מתכנס בדרך.

$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{a.s.} 0$ (אנ ∞)

תוצאה (צויטמן): יהא קיימת סדרה $S_n \in (-1, 1)$, כך לכל k $\{S_n\} \subseteq \{\pm 1\}^N$

מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} S_n S_{n+1} \dots S_{n+k}$

פתרון: נצטרך $X_1, X_2, \dots$ כאלו הבא:

(הכא) $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$

תכנס בדרך אם $X_1, X_2, \dots$ כאלו נצטרך $Y_n = \prod_{i=0}^k X_{n+i}$

$P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$ $Y_1, Y_2, \dots$ הם נצטרך $X_1, X_2, \dots$ כך ש-

$Y_n^k = \prod_{i=0}^k X_{n+i}$

יהי $k \in \mathbb{N}$ ונצטרך

מתכנס בדרך ואז $Y_1^k, Y_2^k, \dots$ הם הסדרה הנצטרך.

$$\sum \text{Var}\left(\frac{Y_n^k}{n}\right) = \sum \frac{\text{Var}(Y_n^k)}{n^2} \stackrel{\approx 1}{=} \sum \frac{1}{n^2} < \infty$$

$$\sum \frac{Y_n^k}{n} \text{ מתכנס כיתר}$$

ואכן

$$N_k = \left\{ \omega / \sum \frac{Y_n^k(\omega)}{n} \right\} \text{ מתכנס (קבוצה באידיה 0)}$$

נסמן

$$W = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k$$

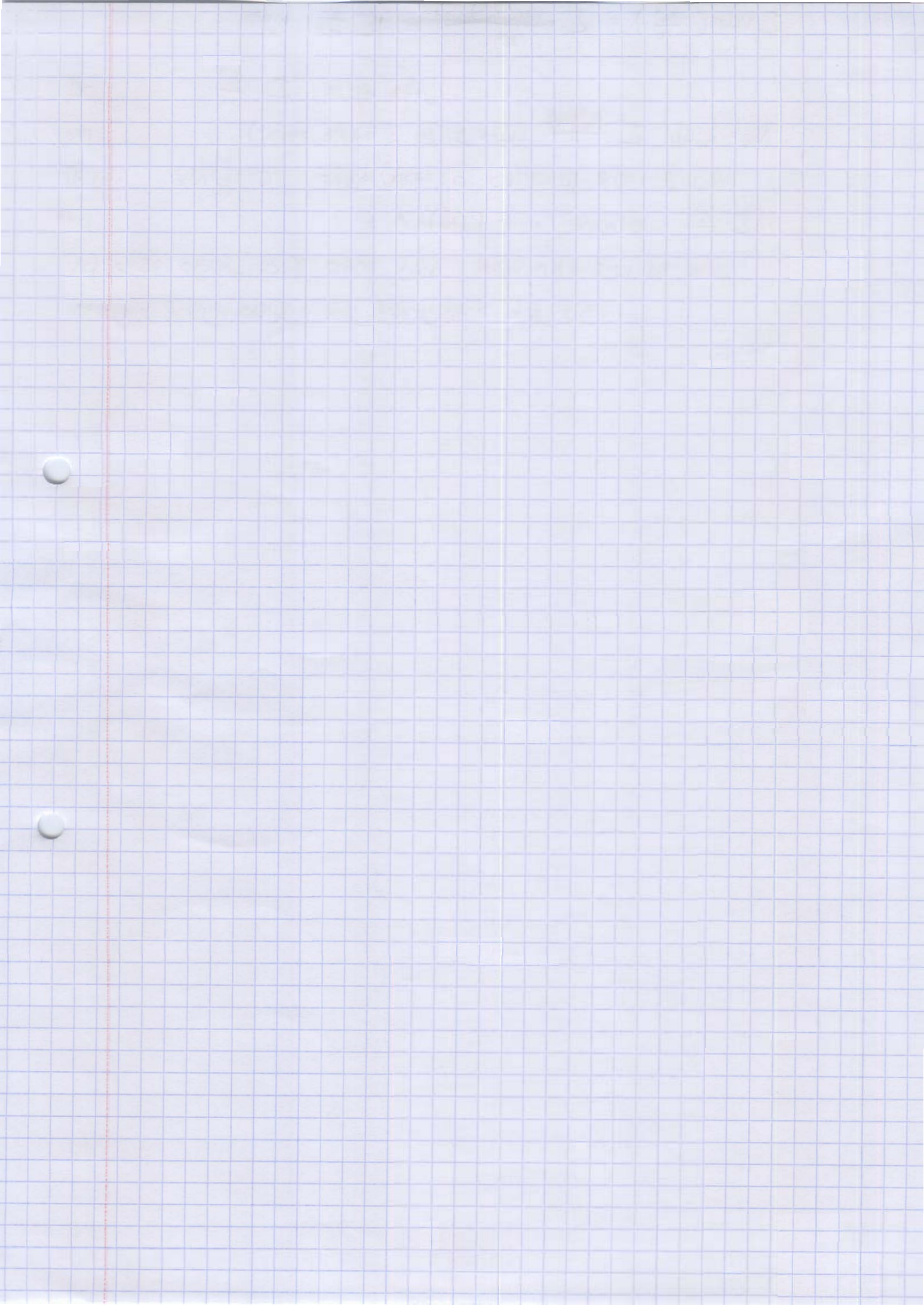
ואכן

$$P\left(\sum \frac{Y_n^k}{n} \text{ מתכנס לכל } k\right) = 1 - P(N) = 1$$

ואכן

ואכן השפה כזאת נפרט סדרה $\{S_n\}$ שבמסלול תמיד תינתן לנו את

ההתכנסות לרצף, בפרט קיימת אבחנה סדרה אחת כזו.



22.1.09

התורה

- האנא להסתברות X, Y מ"א דיסקרטיס, (סדרן) (Y/X)

$$P(Y=l|X=k) = \frac{P(X=k, Y=l)}{P(X=k)}$$

בצורה שקולה באלו צפיפות משותפת, ניתן להגדיר מ"א $(Y/X=x)$ זו

$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

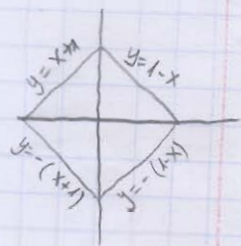
צפיפות

$$P(X \leq t, Y \leq y) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^y f_X(x) f_{Y/X=x}(y) dy dx = \int_{-\infty}^t f_X(x) P(Y \leq y | X \leq x)$$

$$F_{Y/X=x}(y) = \int_{-\infty}^y f_{Y/X=x}(t) dt$$

מ"א זה של פונק' הסתברות מצטברת

$$f_{X+Y}(x) = \frac{f_{Y/X=x}(y) \cdot f_X(x)}{f_Y(y)} \quad (= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)})$$

דוגמה: יהי (X, Y) מ"א שנבחר בהתפלגות אחידה בהיבול שקווקרדיו $Y/X=x$ חלבו את הצפיפות $(1,0), (0,1), (0,-1), (-1,0)$ השית' של ארלה $f_X(x), f_{X,Y}(x,y)$. נסמן את היבול ב-D

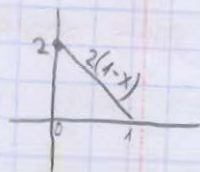
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\text{vol}(D)} \cdot \mathbb{1}_D(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & -1 < x < 1, -1-x < y < 1-x \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
 $-1 < x < 1$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_{-(1-x)}^{1-x} \frac{1}{2} dy = 1-|x|$$

נחלם מכאן את $f_X(x)$

$$f_{Y/X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{2(1-|x|)} \cdot \mathbb{1}_{(-1-x, 1-x)}(y)$$

אם כן, נציב בנוסחה:

שים לב, $Y/X=x \sim U(-(1-x), 1-x)$ ו- $0 < x < 1$
 $f_X(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ הערה: יהי X מ"א עם צפיפות אחתיהי Y מ"א עם התפלגות אחת $(Y/X=x) \sim U(x, 1)$ $P(Z=1), P(Z=0) = \frac{1}{2}$ יהי Z מ"א בן X כך ש-(א) מצאו את הצפיפות המשותפת של X, Y (ב) מצאו את ההתפלגות המשותפת של X בהינתן $Y=y$ (ג) סדר $Z = XZ + (1-Z)Y$, $V = (1-Z)X + ZY$. האם Z, V בנ"ל?

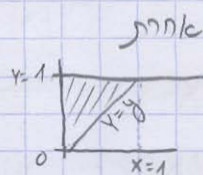
פיתרון

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_{Y/X=x}(y) = \begin{cases} 2(1-x) f_{Y/X=x}(y) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(א)

$$= \begin{cases} 2(1-x) \cdot \frac{1}{(1-x)} \mathbb{1}_{(x,1)}(y) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \begin{cases} 2 & 0 < x < 1, x < y < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$(X, Y) \sim U(D) \quad (D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, x < y < 1\})$$



(ב) (שטח הנסחית הי"ס. שלם כן נחשב תמיד את $f_Y(y)$)

$$f_Y(y) = \int_0^y 2dx = 2y \Rightarrow f_Y(y) = 2y \mathbb{1}_{(0,1)}(y)$$

$$f_{X|Y=y}(x) \stackrel{\text{א"י}}{=} \frac{f_X(x) f_{Y|X=x}(y)}{f_Y(y)} \stackrel{\text{א"י}}{=} \frac{2 \mathbb{1}_D(x, y)}{2y} = \begin{cases} \frac{1}{y} & 0 < x < y \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} = \frac{1}{y} \mathbb{1}_{(0,y)}(x)$$

$$(X|Y=y) \sim U(0, y) \quad \text{ל"ס ד"ר}$$

(ג) כ"ל $Z=1$, $U=X$, $V=Y$, כ"ל $Z=0$, $U=Y$, $V=X$

$$F_{U,V}(u, v) = P(U \leq u, V \leq v) = P(U \leq u, V \leq v | Z=0)P(Z=0) + P(U \leq u, V \leq v | Z=1)P(Z=1)$$

$$P(U \leq u, V \leq v | Z=0) = P(Y \leq u, X \leq v) = \frac{u \cdot v}{Z} \cdot Z = u \cdot v \quad \text{(חל"ס הנסחית)}$$

$$P(U \leq u, V \leq v | Z=1) = P(X \leq u, Y \leq v) = \frac{v \cdot u}{Z} \cdot Z = v \cdot u$$

$$F_{U,V}(u, v) = u \cdot v \cdot \frac{1}{2} + v \cdot u \cdot \frac{1}{2} = u \cdot v$$

ואכן

$$(U, V) \sim U\left(\begin{smallmatrix} \blacksquare \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{ל"ס ד"ר}$$

ואכן ד"ר ה"ר. מצב של ה"ר הצפופות כאשר ההתפלגות אחידה ב $D \Leftrightarrow D \in [a, b] \times [c, d]$ קובעו U, V ה"ר.

תוחלת אחרת (אקרה דל"ס) - ד"ר צפופות

הצורה דל"ס: יהיו X, Y א"י, אז $E(Y|X)$ יהיו א"י ש"ס:

$$E(E(Y|X)) = E(Y) \quad \text{(ב) נוסחת התוחלת השלמה}$$

$$E(\mathbb{1}_A E(Y|X)) = E(Y \mathbb{1}_A | X) \quad (\sigma(a \in \mathbb{R}, \{X \leq a\}) =) \sigma(X) \quad \text{(ג) אם מאורע } A \text{ של"ס ד } \sigma(X)$$

נוסחת השונות השלמה

$$\text{Var}(Y) = E(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(E(Y|X))$$

$$\text{Var}(Y|X) = E(Y^2|X) - (E(Y|X))^2$$

כ"ל

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

הוכחה:

$$E(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(E(Y|X)) = E[E(Y^2|X) - (E(Y|X))^2] + E(E(Y|X)^2) - (E(E(Y|X)))^2 = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

תרגיל 4.2.1. (0,1) תחום ההסתברות של X ו- Y הם תנאים
 $Cov(X, Y)$, $Var(Y)$, $E(Y)$ נמצאים, $Y|X=x \sim \exp(1+x)$ אף X, Y ו- X
 (אם X הוא תנאי הסתברות) $E(Y|X) = \frac{1}{1+X}$, $Y|X \sim \exp(1+X)$ פיתרון

$$E(Y) = E(E(Y|X)) = E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x} f_X(x) dx \stackrel{x \sim U(0,1)}{=} \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx =$$

$$= \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln(2)$$

$$Var(Y|X) = \frac{1}{(1+X)^2} \left(= \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (Y|X \sim \exp(1+X) \text{ ו-})$$

$$Var(Y) = E(Var(Y|X)) + Var(E(Y|X)) =$$

$$= E\left(\frac{1}{(1+X)^2}\right) + Var\left(\frac{1}{1+X}\right) = E\left(\frac{1}{(1+X)^2}\right) + E\left(\frac{1}{(1+X)^2}\right) - \left(E\left(\frac{1}{1+X}\right)\right)^2 = \frac{1}{2} - \ln^2 2$$

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E(XY|X) = X E(Y|X) \quad E(XY) < \infty, \quad E(Y) < \infty \text{ ו-} X$$

$$E(XY) = E\left(\frac{X}{1+X}\right)$$

