

$(\Omega, \mathcal{F})$

סגור תחת קב"ה

אם X הוא סותף ממשית $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש-

$$X^{-1}(-\infty, x] \text{ היא קב"ה מדידה (ב} \mathcal{F} \text{)}$$

(א) נניח X איננו נגזר. $Y = \max(X, 0) = X + \begin{cases} X(\omega) & X(\omega) > 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

יהי $C > 0$, אזי $\{X \leq C\} = \{Y \leq C\}$. $\{X \leq C\}$ היא מדידה אם הנחה

אכן אם $\{Y \leq C\}$ היא מדידה. (דוגמה, אם $X = -5$, אזי $\{X \leq 3\} = \Omega$)

נכון גם עבור $C = 0$. מה דעתכם $C < 0$? ומה הקטוב? $\{Y \leq C\} \cap \emptyset$ לא מדידה.

(ב) X, Y אינן. אזי $\max(X, Y)$ הוא איננו. $Z = \max(X - Y, 0)$

$Z + Y = \max\{X, Y\}$ מדידה.

(ג) נניח $X_1, X_2, \dots$ היא סדרה של אינדיקטורים לא יורדת, ולפיכך

$\lim_n X_n(\omega) \leq \infty$ לכל $\omega \in \Omega$, אזי $\lim_n X_n = X_\infty$ הוא איננו.

הוכחה: $C \in \mathbb{R}$, מידוע $\{X_\infty \leq C\}$ מדידה? מתן ראיה מקבוצת $\{X_\infty(\omega) \leq C\}$

היא איננה פתורה n $X_n(\omega) \leq C$, כלומר $\omega \in \bigcap \{X_n \leq C\}$.

בד"כ: $\{X_\infty \leq C\} = \bigcap \{X_n \leq C\}$. והוכחה הפוכה $\subseteq$. (נראה עכשיו $\sup$):

אם עבור כל משתנה מקרי $\{X_i \leq C\}$ אזי בולבאי גם הסבוכ $\{X_\infty \leq C\}$.

(ד) קב"ה $X_1, X_2, \dots$ סותף איננו, כך לכל $\omega \in \Omega$, $\lim_n \sup X_n(\omega) < \infty$, אזי

$X_{\sup} = \lim_n \sup X_n$ הוא איננו.

הוכחה: $Y_{n,k} = \max(X_k, \dots, X_n)$ $k \geq n$. נקבע את k (בסוף כל

הסדרה n זכאי $Y_{n,k}$. זוהי סדרה אינדיקטורית לא יורדת של איננו. ואז נשתמש

בסעיף (ג). אכן, $(Z_k = \lim_n Y_{n,k})$ היא איננו.

$Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ היא סדרה אינדיקטורית לא עולה של איננו (הואכים שלם לא יורדת,

ואז לוקים אפ"כ) $(X_{\sup})$ הוא איננו.

(ה) $X_1, X_2, \dots$ היא סדרה של איננו כך לכל $\omega \in \Omega$ $\lim_n X_n(\omega)$ קיים.

אזי $\lim_n X_n$ הוא איננו. (נסמן $X_\infty = \lim_n X_n$).

הוכחה: $C \in \mathbb{R}$. מידוע $\{X_\infty \leq C\}$ היא קבוצה מדידה. אם הסבוכ קיים אזי

הוא בהכרח שווה ל $\lim_n \sup X_n$ אלא אפ"כ $\lim_n \sup X_n$ קיים ולכן

אם $X_\infty = \lim_n X_n$ קיים.

מעיתים קרובות, נשתמש ב $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ בתור איברי הסדרה ונקבון ב $\lim_n \bar{X}_n$
 (1) פונקציה וצורת היינו מהיפוס: $A \in \mathcal{B}$ $(A \in \mathcal{F})$ $\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

תהי $A_1, A_2, \dots$ סדרת אולוסות אצרים.
 נגדיר פונקציה X על-אופן הבא $X(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in A_n \text{ לכל } n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ אצרים X אצרים?

$\lim_n \mathbb{1}_{A_n} = X$ היא קבוצה אצרים. כפרט $\{X=1\}$ היא קבוצה אצרים.
 כיצד נראה צורת ילירות בעצרת ה A_n ?

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m \quad B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \quad B_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$$

אחי המאגרות של $\{\liminf \mathbb{1}_{A_n} = 1\}$? $\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$ אכן אצרים

$\lim_n A_n = \{A_n \text{ סיי}\}$ סיומן: הקבוצה המכילה אסוציט
 $\lim_n A_n$ " השניה "

(7) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא אצרים בורא אם היא אצרים ב $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ אצרים בורא.

אם f רצפה, אז f אצרים.
 $f^{-1}(U)$ היא פתוחה לכל U פתוחה. כפרט $f^{-1}(-\infty, c)$ היא פתוחה.
 קבוצה פתוחה היא אצרים ביולי.

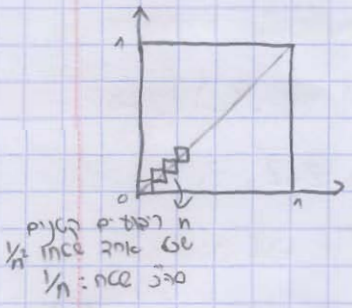
(ח) יהי X מוג $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ אצרים, אז $f(X) = f \circ X$ הוא מוג.

צד $\{f \circ X < c\}$ היא קבוצה אצרים. נגדיר $A = f^{-1}(-\infty, c)$ צדוי קבוצה

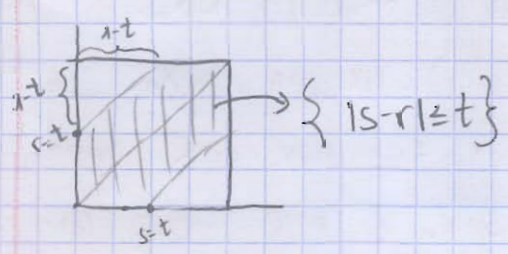
אצרים (תמונה המכילה קב אצרים) ב $\mathbb{R}$. $B = X^{-1}(A)$ קבוצה אצרים ב $\mathbb{R}$.
 $\{f \circ X < c\} = B$

פונקציות ההסתברות המצטברות

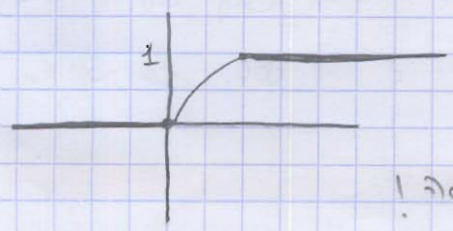
$$F_X(t) = P(X \leq t)$$



(א) קבוצה: $\mathcal{L} = [0, 1]^2$ $\omega = (s, r)$ מוגר עי $X(\omega) = |s-r|$ $P(X=0) = ?$ (קו ישר).

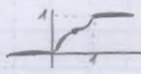


$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - (1-t)^2 & 0 < t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$



הפונקציה תכונה כק:
 F_X פונקציה ציבורה!

$$P(q_n) = \frac{1}{2^n} \quad (\text{הכיוונים של } [0,1]) \quad \text{ } \{ \dots, q_2, q_1, q_0 \}$$



הגדר $q_n = q_n(X)$. אכן $F_X(t)$ (ראו?) קשר לזמן

$$(t < q_1) \quad F_X(t) = F_X(q_1) - \frac{1}{2}$$

$$F_X(t) = P(X \leq t) \quad \text{תכונות פונ' ההסתברות הלא צמודות}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0 \quad *$$

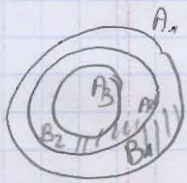
$$F \quad ** \quad \text{רציפה מנימי}$$

$$F \quad *** \quad \text{מונאטונית לכל ירידה}$$

נוכח את: $t_n \searrow t$ כאשר $F_X(t_n) \rightarrow F_X(t)$ יל' דבראית

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{X \leq t\} \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots \quad A_n = \{X \leq t_n\}$$

יל' דבראית: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ (יל' דבראית ד' אפי' ב'ו'ר, אחת' י'צא $1=0$)



$$A_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \quad B_n = A_n - A_{n+1}$$

$$P(A_1) = \sum_n P(B_n) + P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$$

$$P(A_k) = \sum_{n=k}^{\infty} P(B_n) + P(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n) \quad \text{באותו אופן}$$

התכונה השלישית נובעת מהשני והראשונה:

$$\text{אם } A_n \searrow A \quad P(A_n) \searrow P(A) \quad (P(A_n) \searrow P(A) \leftarrow A_n \searrow A)$$

$$\text{(באופן דומה, אם } A_n \nearrow A \quad P(A_n) \nearrow P(A) \leftarrow A_n \nearrow A)$$

צ'ר: $F(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת את שלוש התכונות אכן קיימת (Ω, P, B) ו- X

$$F = F_X \quad \text{נ"ק ו}$$

הוכחה: נניח של $(\mathbb{R}, B)$ $(B - \sigma \text{ שדה בורל})$. נגדיר את P כדלהלן:

$$P(-\infty, t] = F(t)$$

נחיה את הסדרת P לקצעים סגורים מנימי ופתוחים ושליליים

$$P((s, t]) = P(-\infty, t] - P(-\infty, s])$$

(נחיה את ההכנסה לקצעים פתוחים (s, t))

$$P((s, t)) = \lim_{t_n \nearrow t} P((s, t_n])$$

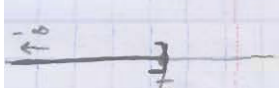
$$P((s, t)) = 1 - P(-\infty, s]) - P([t, \infty))$$

1/c

$$P([t, \infty)) = 1 - P(-\infty, t])$$

$$P([t, \infty)) = \lim_{t_n \nearrow t} P([t_n, \infty))$$

19.11.08



P להסתברות על כדור תמידי, $A_n \in \mathcal{F}$ היא סדרה של אירועים בלתי

תלויים. $P(A_n) > 0$ אז $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

דוגמה: $A_n = (-\infty, t_n)$, $t_n \rightarrow -\infty$, $A_n \in \mathcal{F}$ ואז $P(A_n) > 0$ ו- $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 0$.

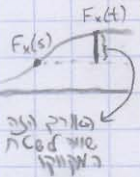
נתונה Z אטומה כוונתית מתקיימת וזמן נחשבות את P לכל B .

הצורה: (R, P, B) אולם. נגדו את X להיות פונקציה $F_X(t) = F(t)$



פונקציה צפיפות:

לעיתים $F_X(t)$ נקראת לפונקציה פונקציה f או פונקציה צפיפות. f היא פונקציה צפיפות של F .



$$F_X(t) - F_X(s) = \int_s^t f(x) dx$$

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^t f(x) dx = \lim_{s \rightarrow -\infty} \int_s^t f(x) dx$$

התפלגות של X יהי X אטומה. $P_R(B) = P(X \in B)$ (כאן B הוא $\{x \in \mathbb{R} : x \in B\}$)

$$P_R(-\infty, t) = F_X(t)$$

P_R היא פונקציה התפלגות של (R, B)

חוק התפלגות (= התפלגות) של X היא P_R .

ד-2 אטומה של אטומה התפלגות אטומה של אטומה חוק התפלגות.

הצורה: אטומה של אטומה התפלגות, אטומה של אטומה פונקציה צפיפות.

אטומה של אטומה התפלגות, אטומה של אטומה פונקציה צפיפות.

האם אטומה של אטומה פונקציה צפיפות?

$$P(X=t) = 0 \text{ לכל } t$$

האם אטומה של אטומה פונקציה צפיפות?

האם אטומה של אטומה פונקציה צפיפות?

פונק' צפיפות: אם X היא פונק' צפיפות f אז $a < b$
 $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$
 אם X היא פונק' צפיפות אז $P(X=x) = 0$ כלומר $P(X=x) = 0$ כל x סוף סוף.

(2) שאלה: האם לכל X יש פונק' צפיפות?

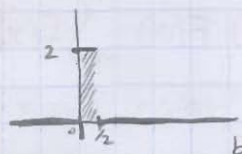
(1) שאלה: האם צפיפות היא הסתברות?

(1) תשובה: לא! אלא איך? X מ"מ נדד

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq t \leq b} P(X=t)$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

אם f היא פונק' צפיפות? f איננה פונק' צפיפות אלא פונק' צפיפות (באופן אחר)



$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b 2 dx = 2(b-a) \quad (0 < a \leq b \leq 1/2)$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t \leq 1/2 \\ 1 & 1/2 < t \end{cases}$$

אם X היא פונק' צפיפות לא ייתכן שיהיה קטע B כך שיהיה $P(B) > 0$

$P(X \in B) > 0$ ואז B היא פונק' צפיפות (אז B היא פונק' צפיפות)

(2) תשובה: האם זה התשובה היא לא!

הצורה: תמונה של התפלגות של X הוא קטע $t \in \mathbb{R}$ כך ש

$$f_X(t) = \begin{cases} 2 & t \in [0, 1/2] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$P(t-\epsilon < X < t+\epsilon) > 0$ $\epsilon > 0$ $1/4$ X הוא פונק' צפיפות

התפלגות אחרת של X היא פונק' צפיפות B , כך

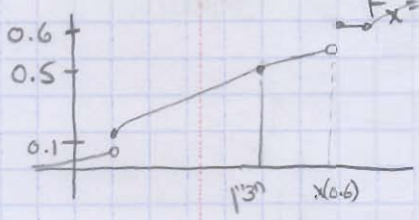
$$1 = P(X \in B)$$

תצפיות: X מ"מ $P_X(B) = P(X \in B)$ $P_X(B)$ היא פונק' צפיפות של X על $\mathbb{R}$.

$P_X(\cdot)$ נקראת התפלגות של X , וניתן לכתוב אותה $F_X(\cdot)$

ואם X ו- Y הם שני פונק' צפיפות אז $F_X = F_Y$

אחוזון של מ"מ



יהי q מספר אחוזון - q של המ"מ X משהו

באופן זה: q מספר X כך

$$P(X < q) \leq q < P(X \leq q)$$

דבר X מוגדרים את X^* המרחב X^* , $X^*: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $X^*(q) = X_q$

X_q הוא ההיבט של X בנקודה q של המרחב X .

תכונות X^* - אינדיקטור

פונקציה: נקבע $[0,1]^2$ ונראה שהיא פונקציה:

$$X(s,r) = |s-r|$$

$$F_X(t) = 2t - t^2 \quad (0 \leq t \leq 1)$$



האם X של צפיפות? אם כן, מהי? X^* ?

$$F = F'$$

הקטע $[0,1]$ אם $a < b$

$$F(a < x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

דבר X של צפיפות, והיא נקראת X^*

נקבע $q \in (0,1)$, מהי X_q ?

$$q = F(X_q) = 2X_q - X_q^2$$

$$X^*(q) = X_q$$

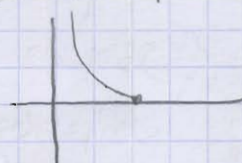
דבר Y , נגד X של צפיפות

מהי F_Y ? האם Y של צפיפות, אם כן, מהי? Y^* ?

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = 2\sqrt{y} - y$$

אם $y < 0$, $F_Y(y) = 0$; אם $y > 1$, $F_Y(y) = 1$ (תשובה: לא)

$$F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}} - 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$



נראה הנגזרת

$$q = 2\sqrt{Y_q} - Y_q$$

Y_q הוא המרחב Y של q

פונקציה: X הוא אחיד ב $[0,1]$ כלומר $F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t & t \in (0,1) \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$

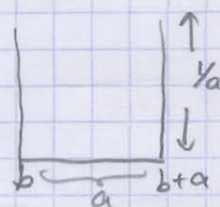
הפונקציה $F'_X(t) = f_X(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0,1) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

$$Y = aX + b$$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(aX + b \leq t) = P(X \leq \frac{t-b}{a}) = F_X(\frac{t-b}{a})$$

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \frac{t-b}{a} \leq 0 \\ \frac{t-b}{a} & 0 < \frac{t-b}{a} < 1 \\ 1 & \frac{t-b}{a} \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & t \leq b \\ \frac{t-b}{a} & b < t < a+b \\ 1 & t \geq a+b \end{cases} \quad F_Y(t) = F_X(\frac{t-b}{a})$$

$$F'_Y(t) = f_Y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq b \\ \frac{1}{a} & b < t < a+b \\ 0 & t \geq a+b \end{cases}$$



$$P(Y \geq y) = P(aX + b \geq y) = P(X \geq \frac{y-b}{a}) = 1 - P(X < \frac{y-b}{a}) = 1 - \lim_{z \rightarrow \frac{y-b}{a}} F_X(z) = 1 - F_X(\frac{y-b}{a})$$

$Y \sim U(b, a+b)$

המרחב Y של Y

26.11.08

פונק' הציפיות וסיוג' חד מימית של $\mathbb{R}$

$$\varphi \circ X = \varphi(X) = Y \quad , \quad X \sim U(0,1) \quad , \quad \varphi(x) = ax+b \quad \text{ב סיוג'}$$

באופן כללי יותר: סיוג' מונטוני (עולה או יורדת) X מ $\mathbb{R}$.

$$Y = \varphi \circ X \quad \text{אם התפלגות } Y?$$

$$f_X(t) = \begin{cases} 1 & t \in (0,1) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

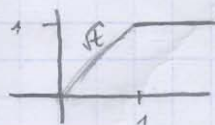
$$\varphi(x) = x^2 \quad , \quad X \sim U(0,1) \quad \text{דוגמה}$$

הצדק למצוא את f_Y היא האנרגיה (או סך הציפיות) F_Y

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(X^2 \leq t) = P(X \leq \sqrt{t})$$

בשיוון האחרון אנו משתמשים בכך ש φ מונטוני עולה או יורדת של X

$$P(X \leq \sqrt{t}) = F_X(\sqrt{t}) = \begin{cases} \sqrt{t} & t \in (0,1) \\ 0 & t \leq 0 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases} \quad (\text{הקטע } [0,1])$$



$$f_Y = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{t}} & t \in (0,1) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

באופן כללי: φ מונטוני עולה או יורדת. נניח בנוסף לכך: F_X חלקה. (ב) φ חלקה.

$$P(Y \leq t) = P(\varphi(X) \leq t) = P(X \leq \varphi^{-1}(t)) = F_X(\varphi^{-1}(t)) \quad ? \quad F_Y \quad \text{אם } Y = \varphi \circ X$$

$$f_Y(t) = F_Y(t) \frac{d}{dt} = f_X(\varphi^{-1}(t)) \cdot \left(\varphi^{-1}(t) \frac{d}{dt} \right) = f_X(\varphi^{-1}(t)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi^{-1}(t)) &= t \\ \varphi'(\varphi^{-1}(t)) \cdot \frac{dt}{t} \varphi^{-1}(t) &= 1 \quad (\text{לפי}) \\ \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} &= \frac{1}{\varphi'(\sqrt{t})} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} = \frac{1}{\varphi'(\sqrt{t})} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \leftarrow \quad \varphi'(t) = 2t \quad , \quad \varphi^{-1}(t) = \sqrt{t}$$

$$f_Y(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \quad \text{ואכן} \quad f_X(\varphi^{-1}(t)) = 1$$

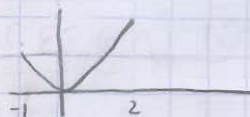
באנליזה: φ מונט' יורדת או עולה.

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = P(\varphi(X) \leq t) = P(X \geq \varphi^{-1}(t)) =$$

נניחם הכך, X אין P -NICK (F_X יציבה).

$$P(X > \varphi^{-1}(t)) = 1 - P(X \leq \varphi^{-1}(t)) = 1 - F_X(\varphi^{-1}(t))$$

$$\frac{d}{dt} F_Y(t) = f_Y(t) = -f_X(\varphi^{-1}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \varphi^{-1}(t) = f_X(\varphi^{-1}(t)) \cdot \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(t))|} \quad \text{לפי וקטור}$$



זה קורה בשל σ איננו מוגדר. אלא מונחיות מאקסמן
 $y(t) = t^2$, $f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & t \in (1, 2) \\ 0 & \text{אלו} \end{cases}$ $X \sim U(-1, 2)$ מאקסמן

$$P(Y \leq t) = P(Y \leq t | X \leq 0) \cdot P(X \leq 0) + P(Y \leq t | X > 0) P(X > 0) = \sqrt{t} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{t}}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$P(Y \leq t | X \leq 0) = \begin{cases} \sqrt{t} & t \in (0, 1) \\ 0 & t \leq 0 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

$$P(X \geq \sqrt{t} | X \leq 0) = \sqrt{t}$$

$$P(Y \leq t | X \geq 0) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{\sqrt{t}}{2} & t \in (0, 4) \\ 1 & t \geq 4 \end{cases} = \left(P(Y \leq t | X \geq 0) = P(X \leq \sqrt{t} | X \geq 0) \right)$$

$$= \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ \frac{\sqrt{t}}{3} + \frac{\sqrt{t}}{2} & t \in (0, 1) \\ \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{t}}{3} & t \in [1, 4) \\ 1 & t \geq 4 \end{cases}$$

30.11.08

פונק' ההסתברות המצטברת לפונק' הצפיפות של אקספורמצייה (למ"מ)

ע אונקט' והאקרה. X מ"מ. צפיפות f_X . נשיר $Y = \gamma \circ X$

$$f_Y(t) = f_X(\gamma^{-1}(t)) \cdot \frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(t))}$$

נחיה זאת לאקרה לבו γ אונקט' והאקרה אקט'.

תצטרף: $X \sim U(-1, 2)$, $f_X = \begin{cases} \frac{1}{3} & t \in [-1, 2] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$, $\gamma(x) = x^2$, $Y = \gamma \circ X$

$$f_Y(t) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{t}} & t \in (0, 1) \\ \frac{1}{2 \cdot 3\sqrt{t}} & t \in (1, 4) \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

לפי ש γ הוא כזו לעבור אל ספי של קטעים $I_1, \dots, I_n$

γ הוא אונקט' (צורה או יוצרת ומש) הכל אחת אחר.

X הוא כלל פונק' צפיפות f_X . $Y = \gamma \circ X$, אחר F_Y ואחר f_Y ?

נשיר $C_i = \gamma^{-1}(I_i)$ (בד"כ $I_1, \dots, I_n$ הוא חלקיק של הישר)

כך $C_1, \dots, C_n$ הוא חלקיק של האירוע $(\Omega, \mathcal{P}, B)$. $\sum P_i = 1$, $P(C_i) = P_i$.

נכס C_i ונראה את P : $P(B) = \frac{P(B)}{P_i}$ כל $B \subseteq C_i$

ובסוף (C_i, P, B)
יפה בהתאמה "אנלוג"

$$f_{X|C_i}(t) = \begin{cases} \frac{f_X(t)}{P_i} & t \in I_i \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כל C_i אסדר X . פונק' הצפיפות הינה:

נבחר $Y = \gamma \circ X$. נכס כל הצמצם C_i

$Y_i = \gamma \circ X_i$, כאשר X_i הוא האג X מצמצם C_i .

F_{Y_i} - צפי פונק' ההסתברות המצטברת של Y_i

אחר f_{Y_i} ? $f_{Y_i}(t) = \frac{f_X(\gamma^{-1}(t))}{P_i} \cdot \frac{1}{\gamma'(\gamma^{-1}(t))}$

אם אסבי F_Y ? f_Y ?

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = \sum_{i=1}^n P(Y \leq t | C_i) \cdot P(C_i) = \sum_{i=1}^n F_{Y_i}(t) \cdot P_i$$

אם אמצא את f_Y , נצטרף ונצא.

$$f_Y(t) = \sum_{s \in \gamma^{-1}(t)} f_X(s) \frac{1}{|\gamma'(s)|}$$

תכונות של NV

תכונות: ליה X מה NV נקבע, כלומר יש קבוצה מת-אניה $a_1, a_2, \dots$ כך ש
 $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i P(X=a_i)$ והסכום $\sum_{i=1}^{\infty} P(X=a_i) = 1$
 NV נבדל:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ נוסח מת-אניה R_d את קבוצת המדידות $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $E: R_d \rightarrow R \cup \{-\infty, \infty\}$

R_d^+ מה המדידות חיוביים (א-שליליים) $E: R_d^+ \rightarrow R \cup \{+\infty\}$
 ואם E את התכונות הבאות:

- א (הומוגניות) אם $\alpha \geq 0$ $E(\alpha X) = \alpha E(X)$ $\Leftarrow E(\alpha X) = \alpha E(X) \forall \alpha \in R$ $\Leftarrow$
- ב (אדיטיביות) X, Y מה NV כך, אז $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
- ג (מונאטוניות). אם $X \leq Y$ (או קבוצה Ω לרוב 1), $E(X) \leq E(Y) \Leftarrow X(\omega) \leq Y(\omega)$
- ד אם X, Y אתה התפלגות אז $E(X) = E(Y)$
- ה $E(1_A) = P(A)$ $\Leftarrow$

לנה שמוקד ψ המוגדר על R_d^+ מקיים (א), (ב), (ה),

$$\psi(X) = \frac{1}{2} P(A) \Leftarrow X = \frac{1}{2} 1_A$$

$$\psi(X) = \frac{k}{2} P(A) \Leftarrow X = \frac{k}{2} 1_A$$

לנה X מקיים גם את (ג) (הנחיה $(\Omega, \mathcal{F}, P)$),

$$\forall \alpha \geq 0 \psi(X) = \alpha P(A) \Leftarrow X = \alpha 1_A$$

אם X חסומה, ניתן לחסום אותה מאחור ומהלך Y_n דיסקרטית
 המקבלים מה סדרה $Y_n \nearrow X$ ערכים $\lim \psi(Y_n) \leq \psi(X)$ אז
 במקרה זה $\psi(X)$ מוגדרת גם $E(X)$

נחיה את E מ R_d^+ ל R_d באופן הבא:

$$X = X_+ + X_- \quad \begin{matrix} \uparrow \max(x, 0) \\ \downarrow \min(x, 0) \end{matrix}$$

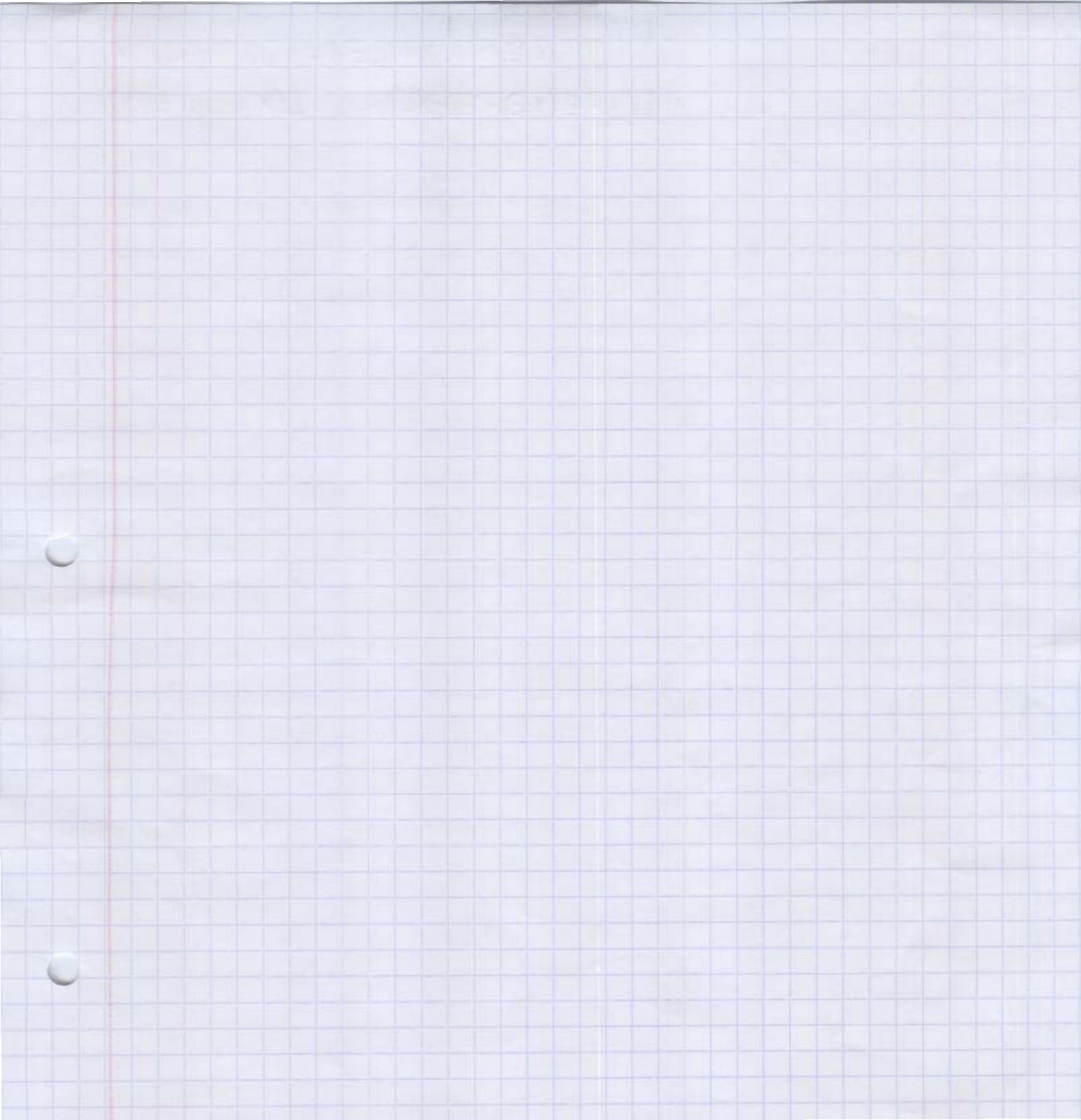
$$E(X) = E(X_+) - E(-X_-)$$

- כל $E(X) = \infty$ נאמר שהתוחלת של X אינה מוגדרת.

- תהי R קבוצת המדידות המוגדרת על $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. נקבע אחרים את תחום ההגדרה של E מהמדידות.

$$X = X_+ - X_- \quad . \quad \text{כאן } X$$

$$E(X) = E(X_+) - E(X_-) \quad . \quad E(X) = \sup_{\substack{Y \leq X \\ Y \text{ פוזיט}}} E(Y)$$



$$(P(X=p_i) = p_i)$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^0 F_x(t) dt + \int_0^{\infty} 1 - F_x(t) dt$$

נצח באמת האקר^א X

$$\overset{\text{def}}{E(X)} = \int_0^1 X^*(q) dq = \int_{-\infty}^0 F_X(t) dt + \int_0^{\infty} 1 - F_X(t) dt$$

ד' x e סוף צביות

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$$

צד: ℓ f_x (צפיפות) ℓ ℓ

י"י x מ"מ. עבור כל $\varepsilon > 0$, נמצא את היחס המקסימלי $I_1, \dots, I_n$

$$(C_i = X^{-1}(I_i)) \quad P(X^{-1}(I_i)) < \varepsilon \quad \text{لـ } \forall$$

הניסיון לא קיבל למעשה הקבלות נכסם אכן מלווה לא יורה שדול.

נשים $\notin X_+$ (החלק החיובי). האמצעות הביסטרטציה הנ"ל נוכל

(7720 777 Y_E P3/2 γ $E = \frac{1}{n}$) Y_E γ

$$Y_\varepsilon(\omega) = \inf_{t \in I} t \quad / \quad \omega \in C$$

$$X(\omega) - Y_\varepsilon(\omega) \leq \varepsilon \quad (i = 1, \dots, n-1) \quad \omega \in G_i \text{ for all } j \in \mathbb{N}$$

$X \geq Y_{1/n} \quad \varepsilon = 1/n$

$$Y_{1/n}(\omega) \rightarrow X(\omega) : 1$$

$$E(Y_\varepsilon) = \sum_{i=1}^n P(I_i) \left(\min_{t \in I_i} t \right) = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f_X(x) dx \cdot \left(\min_{t \in I_i} t \right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \int_{I_i} f(x) dx \cdot \left(\min_{t \in I_i} t \right)}_{I_k} + \underbrace{\int_{I_n} f(x) dx \left(\min_{t \in I_n} t \right)}_{I_n}$$

$$(k) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{I_i} x f_i(x) dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{I_i} (\max_{t \in I_i} t) f_i(x) dx \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{I_i} (\max_{t \in I_i} t + \varepsilon) f_X(x) dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{I_i} f_X(x) dx (\min_{t \in I_i} t + \varepsilon) =$$

$$= (lc) + \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \int_{I_i} f_x(x) dx}_{1 \atop 1} = (lc) + \varepsilon$$

(א) סדרת x_n (כמו קודם) ויציג נ"ח חזק של x_n על x_{n-1} עד $C_0 \dots C_n$.

$$E(Z) = \int_{I_{n-1}} x f_x(x) dx$$

א"ל האחרון נותן לנו את הניסוח:

• $\rho(z=0)$ 0-2 MeV of pion z min due to JGWP

$$z = z_1 + z_2 \quad \text{e } w$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty}$$

7.12.08

תוחלת

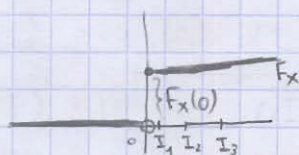
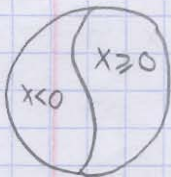
$$E(X) = \int_{-\infty}^0 F_X(t) dt + \int_0^{\infty} 1 - F_X(t) dt = \int_0^{\infty} X^*(t) dt$$

הספרון תוחלת de נ"א אריות

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x) dx$$

מאקרה של x ו של צפירות f_x יז

$$X = X^+ + X_- \quad \text{שם } X^+ \text{ ו-} X_- \text{ הן } X \text{ חיובית ושלילית}$$



well due to $x_{\min}^{\varepsilon}, x_{\max}^{\varepsilon}$ and 2 and $0 < \varepsilon$

$$X_{\max}^{\epsilon} - X_{\min}^{\epsilon} \leq \epsilon \quad \leftarrow \quad X_{\min}^{\epsilon} \leq X \leq X_{\max}^{\epsilon}$$

הפסקה שלמה זאת היא: (חשוב: אם x יש צפיפות ואפוא הפנייה)

(נכ) חתמן את החתן בחיוב של הילד מקבלים $I_1, I_2, \dots$ כן ע.

$w \in C_i$ $\forall i, C_i = X^{-1}(I_i)$. $\in$ to nicht jk. sup. to fe. willk.

$$X_{\min}^E(\omega) = \min_{t \in I_i} t = m_i$$

$$X_{\max}^{\varepsilon}(\omega) = \max_{t \in I_1} t = M_1$$

: 'ମନେ ଶାନ୍ତି

$$\Leftarrow X \leq Y$$

$$P(X \leq t) \geq P(Y \leq t)$$

$$F_x(t) \geq F_y(t)$$

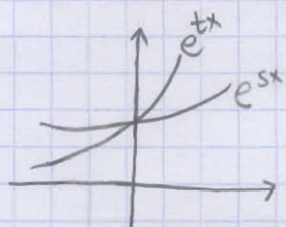
$$F_{X_{\max}}^{\varepsilon}(t) \leq F_X(t) \leq F_{X_{\min}}^{\varepsilon}(t) \quad \text{t. d. d. p. d.,} \quad X_{\min}^{\varepsilon} \leq X \leq X_{\max}^{\varepsilon}$$

$$E(X_{\min}^{\varepsilon}) = 0 \cdot F_X(0) + \sum_{i=1}^{\infty} p(c_i) \cdot m_i$$

(1)

$$E(X_{\max}^{\varepsilon}) = 0 \cdot F_X(0) + \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i) M_i$$

(2)



$M_X(s) < \infty, 0 < s < t$ כל y , $t > 0$, $M_X(t) < \infty$ ונניח
 $e^{sx} \leq \max(1, e^{tx}) \leq 1 + e^{tx}$

$M_X(s) < \infty$ אם $t < s < 0$ כל y $t < 0$ עבור $M_X(t) < \infty$
 (הוכחה דומה)

סקרנו: קובצת הערכים t עבורם $M_X(t) < \infty$ היא $(-\infty, \infty)$

אם $t > 0$ $M_X(t) = \int_0^1 e^{tx} \cdot 1 dx = \left. \frac{e^{tx}}{t} \right|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}$ $X \sim U(0, 1)$

$\frac{1}{t} (1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots - 1) = \frac{1}{t} (t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots) =$ נניח $E(X^n) = \frac{1}{n!}$
 $1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots$ $E(X^n) = \frac{1}{n}$

$M_t(x) = 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots$ הכנסו: $E(X^n)$

$M_t(x) = 1 + tE(X) + \frac{t^2 E(X^2)}{2!} + \frac{t^3 E(X^3)}{3!} + \dots$ נניח $E(X^n)$

$E(X^n) = \frac{1}{n+1} \leftarrow \frac{t^n}{(n+1)!} = \frac{t^n E(X^{n+1})}{n!}$ כל

$E(X) = \frac{1}{2}$ הכנסו

10.12.08

פונקציית המומנטים

$M_X(t) = E(e^{tx})$ אם X

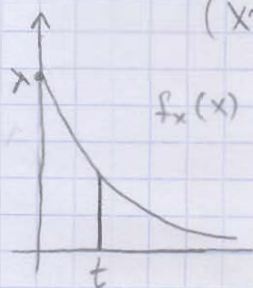
אזכור: לפונקציית המומנטים יש קשר הדוק עם $M_X(t)$. ראו סיכום.

$M_X(t) = 1 + tE(X) + \dots + \frac{t^n}{n!} E(X^n)$
↑
מומנט של X

הצגה:

$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$ 1. X - פונקציית צפיפות: $\lambda > 0$

זוהי פונקציית הצפיפות של ההפרש בין שני זמנים המתנה



$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx =$
 $= \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda-t} \int_0^{\infty} \underbrace{(\lambda-t) e^{-(\lambda-t)x}}_{1} dx = \frac{\lambda}{\lambda-t}$ $\lambda > t$

$\frac{\lambda}{\lambda-t} = 1 + t + t^2 + \dots = 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2!} E(X^2) + \dots$ אם $\lambda = 1$ נניח

$E(X^n) = n! \leftarrow \frac{t^n}{n!} E(X^n) = t^n$ אם n כל

$E(X^2) = 2$, $E(X) = 1$ הכנסו

$$V(x) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - 1^2 = 1$$

$$X \sim \exp(\lambda) \quad : \text{ע.נ.}$$

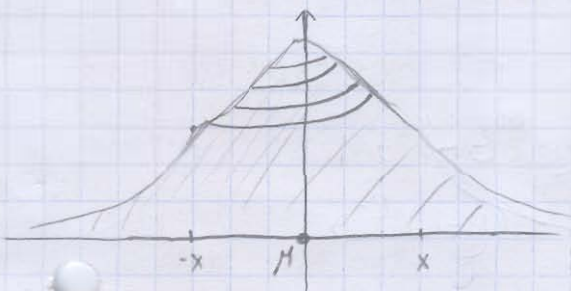
$$E(X^n) = \int_0^{\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \stackrel{\lambda x = y}{=} \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} y e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda} (-y e^{-y} - e^{-y}) \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \cdot 1 = \frac{1}{\lambda}$$

התפלגות נורמלית

נאמר שיש מרחב נורמלי אם X ו- Y צפיפות אחידים זהו (התנאי השני)

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma^2, \mu; \text{פרמטרים})$$



נניח $\mu=0$! $\sigma=1$ שבו מקורה מיוחד

יש גם אם לבדוק הצפיפות היא סימטרית סביב μ

כאן, היא עולה עם μ , ויורדת ממנו ואילך

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \text{אנחנו רוצים צפיפות כזו נקרא 'נורמלי סטנדרטי'}$$

נניח את הלכה ה- I

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dx dy$$

$$\begin{aligned} y &= r \sin \theta \\ x &= r \cos \theta \\ r^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} |1| dr d\theta = 1$$

$$\frac{dx}{dx} \frac{dy}{dy}$$

14.12.08

התפלגות נורמלית

כנר X מתפלג נורמלית אם X פונקציה צפופה

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$

אסוגים $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

X סימטרית סביב μ (כ $f(\mu-x) = f(\mu+x)$)

נורמלית סטנדרטית היא כנר $\mu=0, \sigma^2=1$

פונק' הצפיפות של ארנ' נורמלית סטנדרטית הוא

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

אם ארנ' X של ארנ' פונק' צפופה נכר

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy \stackrel{\text{מחליף}}{=} \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dy}{dr} \\ \frac{dx}{d\theta} & \frac{dy}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r d\theta dr =$$

$$\int_0^{\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} = -0 - (-1) = 1$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = N(\mu, \sigma^2)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dx}{dy} dy = y = \frac{x-\mu}{\sigma} \text{ (מס)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$$

פונק' צפופה האוניברסלית של $N(0,1)$

$X \sim N(0,1)$

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-2tx}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-2tx+t^2}{2}} \cdot e^{\frac{t^2}{2}} dx = \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx}_1 = e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

$$e^{\frac{t^2}{2}} = 1 + \left(\frac{t^2}{2}\right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^3$$

(ולקחת t^{2n} הוא $\frac{1}{n!2^n}$)

$$M_X(t) = 1 + E(X) + \frac{1}{2!} E(X^2) +$$

$$\frac{E(X^{2n})}{(2n)!} = \frac{1}{n! 2^n}$$

$$E(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{n! 2^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1 \quad E(X^2) = 1, \text{ כפי}$$

$$V(X) = 1 \quad E(X) = 0 \quad X \sim N(0, 1) \quad \&$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \text{דוגמה}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx}_{y = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad \text{||} \quad 0} + \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx}_1 = \mu$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

יש להשתמש בהחלפת משתנים
 $y = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$\mu_x(t) = e^{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$$

במקרה הכללי

כאשר $\mu=0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t^2 \sigma^2}{2n}\right)^n = e^{\frac{t^2 \sigma^2}{2}}$$

התפלגות מולרית של N

N ממש, $X: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ (מצד, טאורי $\bar{X}(B)$ הוא מילוי של $B \subseteq \mathbb{R}$) (בוא).

$$(\mathcal{L}, \mathcal{P}, B)$$

$$(X, Y): \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$P(X \leq x, Y \leq y) = F_{X,Y}(x, y)$$

(אנחנו מצמצמים את הידיון למקרה של (X, Y) הוא מצד, טאורי

$(B)^{-1}(X, Y)$ קבוצה מצד $\mathcal{L}$, B מילוי קבוצה ב $\mathbb{R}^2$

תכונות $F_{X,Y}$ הקדמה

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} F_{X,Y}(x,y) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} F_{X,Y}(x,y) = 1$$

$$\leftarrow y_1 \geq y_2, x_1 \geq x_2$$

$$F_{X,Y}(x_1, y_1) \geq F_{X,Y}(x_2, y_2)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x_0, y_0)$$

תכונות F_X (הקדמה)

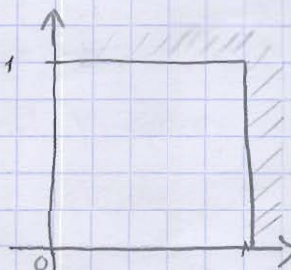
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

$F_X(x)$ מונוטונית לא יורדת

$F_X(x)$ יציבה

$$F_{X,Y}(x,y) =$$



הקדמה

נניח $(X,Y): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ נק' $F_{X,Y}$ היא פונק' התפלגות משותפת.

$$F_X(t) = P_X(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} F_{X,Y}(t,s) = 1$$

או $F_Y(s) = 1$

הפונק' $f_{X,Y}(x,y)$ היא צפיפות משותפת, כלומר $f_{X,Y}(x,y) \geq 0$

$$\int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y) dx dy = P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)$$

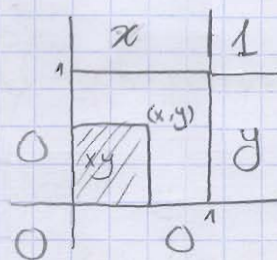
כלומר, האינטגרל של $f_{X,Y}$ על תחום $[a,b] \times [c,d]$ שווה לפרובאביליטי של (X,Y) להיות בתחום זה.

$$X=Y$$

$$X \sim U(0,1) : \text{אם } X \text{ ו-} Y$$

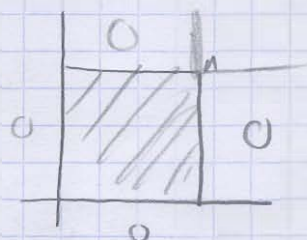
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xy & 0 \leq x,y \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xy & 0 \leq x,y \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$



הקדמה

$$F_{X,Y}(x,y)$$



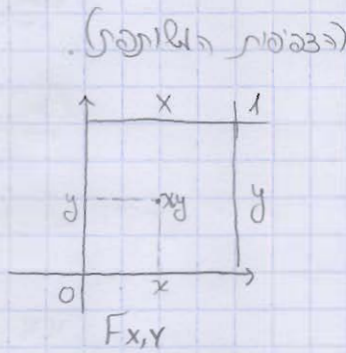
$$f_{X,Y}(x,y)$$

17.12.08

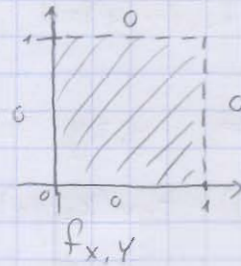
התפלגות מאוחדת של X ו- Y

$$F_{X,Y}(x,y) = xy$$

$0 \leq x,y \leq 1$ אחרת 0



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x,y \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (1) \text{ פונקציה}$$



$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \geq y \text{ או } x \\ xy & 0 \leq x,y \leq 1 \\ y & 1 < x, 0 \leq y \leq 1 \\ x & 1 < y, 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x,y \end{cases}$$

אם נתן פונקציה של התפלגות של X ו- Y בנפרד?

$f_{X,Y}(x,y)$ היא פונקציה צפופות מאוחדת. היא חייבת לקבלת ערכים ב- $B \subset \mathbb{R}^2$

$$P((X,Y) \in B) = \int_B f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

$$P((X,Y) \in B) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x,y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

X ו- Y בנפרד

$$P(X \in [a,b]) = \lim_{c \rightarrow -\infty, d \rightarrow \infty} P((X,Y) \in [a,b] \times [c,d]) =$$

$$= \lim_{c \rightarrow -\infty, d \rightarrow \infty} \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_a^b f_{X,Y}(x,y) dx dy =$$

$$\int_a^b \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy}_{f_X(x)} dx$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \begin{cases} 0 & x \notin [0,1] \\ 1 & x \in [0,1] \end{cases}$$

הפונקציה של X

$$F_Y(y) = F_X(x) \quad \text{באופן דומה}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

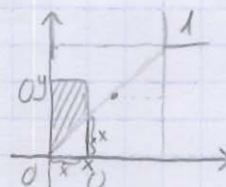
$$f_{X,Y}(x,y)$$



(2) פונקציה של Y

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \geq y \text{ או } x \\ xy - x^2 & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ y^2 & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 2x - x^2 & y > 1, 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x,y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \geq y \text{ או } x \\ 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ y > 1, 0 \leq x \leq 1 \\ 1 < x,y \end{cases}$$



f_Y ! f_X ארס

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \begin{cases} 0 & x \notin [0,1] \\ 2(1-x) & x \in [0,1] \end{cases}$$



$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \begin{cases} 0 & y \notin [0,1] \\ 2y & y \in [0,1] \end{cases}$$

$$f_{X,Y} = \begin{cases} cxy & 0 \leq x,y \leq 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

(3) קראו את זה

f_X, f_Y ארס, $f_{X,Y}$ ארס, צפיפות $f_{X,Y}$ את המרחב c למרחב X,Y

$$c=4 \quad \text{כי} \quad 1 = \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy = \frac{1}{4} *$$

$0 \leq x,y \leq 1$, $F_{X,Y}$ את הצפיפות

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x \int_0^y 4st ds dt = \int_0^x 4t \frac{s^2}{2} \Big|_0^y dt =$$

$$\int_0^x 2ty^2 dt = 2y^2 \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = y^2 x^2$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & 0 \geq y \text{ או } x \\ x^2 y^2 & 0 \leq x,y \leq 1 \\ y^2 & 1 \leq x, 0 \leq y \leq 1 \\ x^2 & 0 \leq x, 1 \leq y \\ 1 & 1 \leq x,y \end{cases}$$

$$f_X(x) = 4 \int_0^1 xy dy = 2x$$

$0 \leq x \leq 1$ אחרת

$$f_X(x) = 0$$

$$f_X(x) = f_Y(x) \quad \text{אז ארס}$$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

אם X, Y עצמאיים

אם X, Y עצמאיים

אם X, Y עצמאיים : $a < b$! $c < d$ ארס

$$P((X,Y) \in [a,b] \times [c,d]) = P(X \in [a,b]) \cdot P(Y \in [c,d])$$

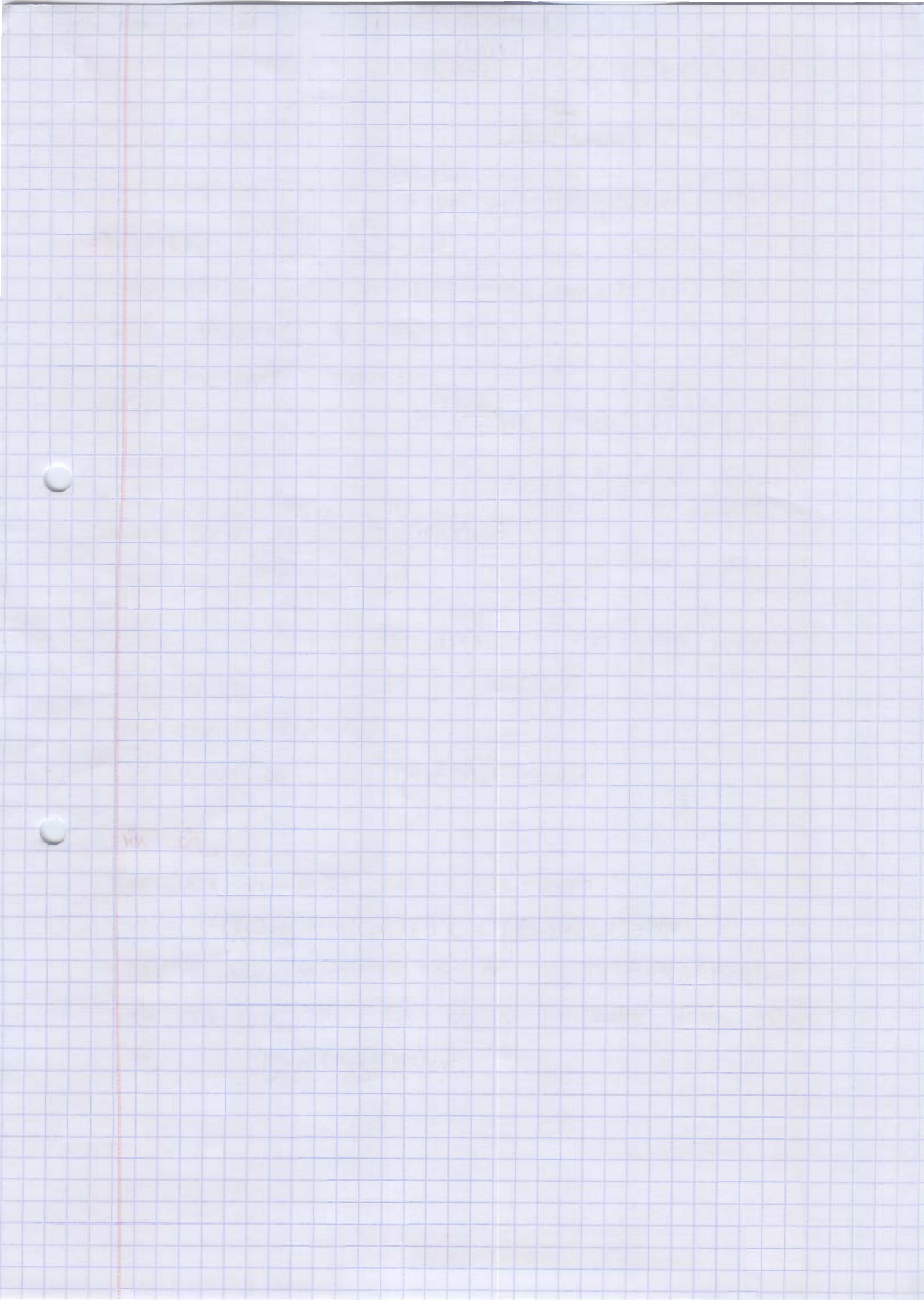
$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$$

אם X, Y עצמאיים

אם X, Y עצמאיים : X, Y עצמאיים

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

אם



סף תלות של משתנים מקריים

X, Y משתנים מקריים. נניח שיש להם פונקציות צפיפות משותפתות: $a < b$ ו- $c < d$ מתקיים:

$$P(a \leq X \leq b \text{ ו- } c \leq Y \leq d) = P(a \leq X \leq b) P(c \leq Y \leq d)$$

השאלות:

$P(X \leq b \text{ ו- } Y \leq d) = P(X \leq b) P(Y \leq d)$
(1) לכל b, d :

$P(X \in B_1 \text{ ו- } Y \in B_2) = P(X \in B_1) P(Y \in B_2)$
(2) לכל 2 קבוצות בורליות $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}$:

תשובה: נניח $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. X הוא משתנה מקרי. $X(B)$ הוא קבוצת בורל

לכל קבוצת בורל B ב- $\mathbb{R}$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: X$. אנו רוצים לבדוק ביותר של X הוא משתנה בלתי תלוי?

אם לא, נניח X ו- Y הם שני משתנים מקריים, ו- X הוא משתנה בלתי תלוי.

הם שני משתנים מקריים. נניח X ו- Y הם שני משתנים מקריים.

נניח X ו- Y הם שני משתנים מקריים. נניח X ו- Y הם שני משתנים מקריים.

אם X ו- Y הם שני משתנים מקריים. נניח X ו- Y הם שני משתנים מקריים.

אם X ו- Y הם שני משתנים מקריים. נניח X ו- Y הם שני משתנים מקריים.

קבוצה: $\sigma(X) = \{ \emptyset, \Omega, A, A^c \}$, $X = \mathbb{1}_A$, $A \subset \Omega$.

שאלה: $\sigma(X) = \{ \emptyset, \Omega, A, A^c \}$, $X = \mathbb{1}_A$, $A \subset \Omega$.

$\sigma(X) = \{ B \times I \mid I = [0, 1], B \subset \Omega \}$

תשובה: נניח X ו- Y הם שני משתנים מקריים. נניח X ו- Y הם שני משתנים מקריים.

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$
אם $A \in \mathcal{F}_1$, $B \in \mathcal{F}_2$, מתקיים:

אם X ו- Y הם שני משתנים מקריים. נניח X ו- Y הם שני משתנים מקריים.

תשובה: נניח X ו- Y הם שני משתנים מקריים. נניח X ו- Y הם שני משתנים מקריים.

תשובה: נניח X ו- Y הם שני משתנים מקריים. נניח X ו- Y הם שני משתנים מקריים.

$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$: אם X ו- Y הם שני משתנים מקריים.

$P(X \leq b, Y \leq d) = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^d f_{X,Y}(x,y) dy dx$
הוכחה: יהי a, b מספרים:

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$

$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$

הוכחה: יהי a, b מספרים

$P(X \leq b, Y \leq d) = P(X \leq b) P(Y \leq d) = \int_{-\infty}^b f_X(x) dx \cdot \int_{-\infty}^d f_Y(y) dy =$

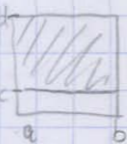
$f_X(x)$ ו- $f_Y(y)$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^d f_{X,Y}(x,y) dy dx}_k : \underbrace{\int_{-\infty}^d \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(x,y) dx dy}_a$$

$$k = \int_{-\infty}^d f_{X,Y}(x,y) dy + \int_d^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

$$a = \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(x,y) dx + \int_b^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx$$

הנחת: X, Y תלויים



$$\int_c^d \int_a^b \varphi(x,y) dx dy = \int_c^d \underbrace{\left[\int_a^b \varphi(x,y) dx \right]}_{\varphi(y)} dy$$

$$P(-\infty \leq X \leq b, -\infty \leq Y \leq d) = \int_{-\infty}^d \int_{-\infty}^b f_{X,Y}(x,y) dy dx$$

הנחה: X, Y //

$$P(-\infty \leq X \leq b) P(-\infty \leq Y \leq d) = \int_{-\infty}^b f_X(x) dx \cdot \underbrace{\left[\int_{-\infty}^d f_Y(y) dy \right]}_{\text{הנחה}} =$$

$$= \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^d \underbrace{f_Y(y) dy}_{\text{הנחה}} \cdot f_X(x) dx = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^d f_X(x) f_Y(y) dy dx$$

הנחה: b, d כלשהם

$$\int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^d f_X(x) f_Y(y) dy dx = \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^d f_{X,Y}(x,y) dy dx$$

$$\text{הנחה: } P(X,Y) = f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \text{אם } f_X(x) f_Y(y) \text{ הוא פונקציית צפיפות, אז } \int_{-\infty}^b \int_{-\infty}^d f_{X,Y}(x,y) dy dx = 0 \text{ : } e$$

הנחה: (X,Y) תלויים

הנחה: X, Y תלויים, אז $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ ו-1, $f_X(x) f_Y(y) = 0$: e

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \text{ אם } X, Y \text{ תלויים}$$

הנחה: $f_X(x) = f_Y(y) = 1$, $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{אם } x, y \in [0,1] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$

$$f_{X,Y}(s,t) = f_X(s) f_Y(t) = st$$

הנחה: $X, Y \sim \exp(\lambda)$, אז $f_{X,Y}(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} & x, y \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

סדרות של מ"מ

$X_1, X_2, \dots$ סדרה של מ"מ

א' תנאים: $(\mathcal{L}, P)$, $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ σ שדות (אחר להם בת"פ) אם $\mathcal{L}$

$A_i \in \mathcal{F}_i$ $(i=1, \dots, n)$ $A_1, \dots, A_n$ בת"פ

הצורה: $X_1, X_2, \dots$ היא סדרה מ"מ בת"פ אם $\mathcal{L}(\mathcal{X}) = \mathcal{L}(X_1, X_2, \dots)$ הם בת"פ

סוגי התכנסות & מ"מ

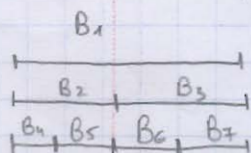
3 סוגי התכנסות, מתוכם 2 דורשים של המ"מ יושגו על אותו $\mathcal{L}$.

(א) התכנסות בהסתברות: (אחר) $X_1, X_2, \dots$ מתכנסת בהסתברות ל X

אם לכל $\varepsilon > 0$ יש N כך שלכל $n > N$ $P(|X_n - X| > \varepsilon) < \varepsilon$

הצורה שלפני: קבע ε , אז (צד סדרה) $A_n = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$ ואז $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$

דוגמה: (צד מ"מ) B_n כולק, $X_n = 1_{B_n}$, $\mathcal{L} = [0, 1]$, $P = \lambda$



$\{X_n\}$ שואפת בהסתברות ל-0. ל"ח $\varepsilon = 1/2$ אז

$$A_n = \{|X_n| > 1/2\} = B_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0$$

24.12.08

(ב) התכנסות במ"מ (כמעט תמיד): (אחר) $X_1, X_2, \dots$ מתכנס

במ"מ במ"מ לקום X אם $1 = P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega))$ או $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

נ"מ: כולק אם $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ אז $X_n \xrightarrow{P} X$

הצד: חוקי מספרים גדולים. חלל (התכנסות בהסתברות) וחזק (התכנסות a.s.).

המ"מ של מ"מ קטע' (חלק I)

(תנאי סדרת מ"מ) $A_1, A_2, \dots$ אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ אז

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0 \quad (\text{ידידות}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} A_l$$

במ"מ של מ"מ המ"מ אחר: יהי $X_n = 1_{A_n}$ אם $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ אז $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$

במ"מ: $B_k = \bigcup_{l=k}^{\infty} A_l$ (צד) $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k$

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(B_k)$$

$$P(B_k) = P(\bigcup_{l=k}^{\infty} A_l) \leq \sum_{l=k}^{\infty} P(A_l) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(B_k) = 0 \quad \leftarrow \text{ולכאן הוא הולך}$$

הצד: ההסתברות (דוגמה & קטע') אינו נכונה.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \{0\}$$

$$P = \lambda, \quad A_n = [0, 1/n], \quad \mathcal{L} = [0, 1]$$

מצב של בור קטע (חלק II)

נניח כי $A_1, A_2, \dots$ היא סדרה של אולמות בת' $(A_1, \dots, A_n)$ בת' אלה זה

אם $P(\lim A_n) = 0$ אזי $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ כלומר, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ כלומר, $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$

אם $X_n = 1_{A_n}$ אזי $X_1, X_2, \dots$ בת' אנדומורפיזם $S_n = \sum_{n=1}^N X_n \leftarrow$ סדרה של קבוצות

אם (משפט) $\lim A_n$ הוא מילוי פונקציות חיוניות, אזי זה לאו

לכספיות חיוניות $S_n \rightarrow \infty$.

X, Y מ"מ המוגדרת על (R, P) . תהי φ פונקציה מ R^2 ל R

(כאמור $\varphi^{-1}(B)$ היא בורח R^2 אשר B בורח ב R)

$\varphi(X, Y)$ מ"מ. מה תוצאתו?

אם $f_{X,Y}$ צפיפות משותפת $f_{X,Y}$.

$$E(\varphi(X, Y)) = \iint \varphi(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

אנכיות

X, Y מ"מ בת' נפרד. $\varphi(X, Y) = XY$

סכס, נקח Y^E דיסקרטי קרוב ל Y (שמשדר האמצעות Y)

$\sigma(Y^E) \subseteq \sigma(Y)$ ($\sigma = \sigma$ שדה שנגזר מ"מ) X, Y^E בת'.

$$E(Y^E X) = E(Y^E) E(X)$$

$$E(YX) = E(Y) E(X)$$

ואכן

התכנסות של סדרה של פונקציות

אם $A_1, \dots, A_n, \dots$ הם מאורעות נ"ר! $P(\limsup A_n) = 0$ כאשר $\sum P(A_n) < \infty$
ל"כ הסדרה מתכנסת ל-0

אם X, Y נ"ר $E(XY) = E(X)E(Y)$

אם X, Y, Z נ"ר אז XY נ"ר! Z נ"ר

(X, Y, Z) נ"ר משמאלו $\sigma(X), \sigma(Y), \sigma(Z)$ נ"ר
 A_X, A_Y, A_Z

$$P(A_X \cap A_Y \cap A_Z) = P(A_X) P(A_Y) P(A_Z)$$

יש להוכיח $\sigma(XY)$ ו- $\sigma(Z)$ נ"ר

נ"ר $A \in \sigma(XY)$ ו- $B \in \sigma(Z)$ נ"ר

נ"ר נ"ר, כי $\sigma(XY)$ ו- $\sigma(X)$ שניהם $\sigma(Y)$

אם $X_1, \dots, X_n$ נ"ר אז $E(X_1 \dots X_n) = E(X_1) \dots E(X_n)$

כלי מקור

ל"כ $X \geq a$ (נ"ר) $a > 0$ אז $P(X \geq a) \cdot a \leq E(X)$

הסדרה Y מאופן הבא $Y = \begin{cases} 0 & X < a \\ X & X \geq a \end{cases}$ ו- $Y \leq X$ ולכן

$$E(Y) \leq E(X) \quad (E(Y) = P(X \geq a) \cdot a)$$

הוכחה: $X_n = 1_{A_n}$ (נ"ר) $e^{-X_1}, \dots, e^{-X_n}$ נ"ר

נ"ר נ"ר (כי אם $X_1, \dots, X_n$ נ"ר אז $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ נ"ר)

ה"כ נ"ר $f_1, \dots, f_n$ הן פונקציות מדדיות

$$E(e^{-(X_1 + \dots + X_n)}) = E(e^{-X_1} e^{-X_2} \dots e^{-X_n}) = \prod_{i=1}^n E(e^{-X_i}) =$$

$$= \prod_{i=1}^n (1 - p_i (1 - \frac{1}{e}))$$

$$E(e^{-X_i}) = (1 - p_i) + \frac{p_i}{e} = 1 - p_i (1 - \frac{1}{e}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (1 - \frac{1}{e}) \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty \text{ מ"כ}$$

$$\prod_{i=1}^n (1 - \alpha_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \infty$$

ל"כ ה"כ $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty$ וקרה n וקרה M כך ש- $M \leq E(e^{-(X_1 + \dots + X_n)})$

$$P(e^{-(X_1 + \dots + X_n)} \geq e^{-M}) e^{-M} \leq E(e^{-(X_1 + \dots + X_n)})$$

$$P(\dots) \leq e^M E(e^{-(X_1 + \dots + X_n)})$$

$$P(X_1 + \dots + X_n \leq M) \leq e^M E(e^{-(X_1 + \dots + X_n)})$$

נקבע את M ונשאל את n מאינסוף.

$$P(X_1 + \dots + X_n \leq M) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

כי נכון עבור כל M .

$$\limsup A_n = \{\omega / X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty\} \quad \limsup A_n \text{ זהו האינסוף}$$

קטנו $X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega) \rightarrow \infty$ נאצל תמיד

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad S_n \xrightarrow{a.s.} \infty \quad \text{לפי דבור, אינסוף בלתי נגמר}$$

$$B_{n,M} = \{S_n \leq M\}$$

$$B_{\infty,M} = \{\lim S_n \leq M\}$$

$$P(B_{\infty,M}) = 0$$

$$P(X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega) \rightarrow \infty) = P\left(\bigcap_n B_{\infty,n}^c\right) = 1$$

4.1.09

חוק המספרים המרכזיים

החוק הראש: התכנסות בהסתברות

החוק השני: התכנסות נאצל בלתי נגמר

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

יפה $X_1, X_2, \dots$ סדרת א.נ.ל, קובץ א.נ.ל.ל.ל.

נאצל א.נ.ל.ל.ל.

2 גרסאות של החוק הראש והמספרים המרכזיים

גרסה א': $X_1, X_2, \dots$ א.נ.ל.ל. עם תוחלת μ ושונות σ^2 . כלומר

$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ כאשר $E(X_i \cdot X_j) = E(X_i)E(X_j)$ לכל $i \neq j$

גרסה ב': אם $X_1, X_2, \dots$ א.נ.ל.ל. עם תוחלת μ אז

הערה: (א) אם X, Y שני א.נ.ל.ל.ל. נאצל

(ב) היחס לא נכון

(ג) נניח כי $X_1, \dots, X_n$ א.נ.ל.ל. עם תוחלת μ , אז $E(\bar{X}_n) = \mu$ ויתר

$$V(\bar{X}_n) = E(|\bar{X}_n - \mu|^2) = E\left(\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)\right]^2\right) = \sum_{i,j=1}^n E[(X_i - \mu)(X_j - \mu)] = \sum_{i=1}^n E[(X_i - \mu)^2] = \frac{1}{n^2} \cdot n V(X_1) = \frac{V(X_1)}{n}$$

לפי אי-שוויון צ'בצ'ב: אם $X \geq a$ (נאצל תמיד) אז $a > \mu$

אם $a = \varepsilon^2$, $X = (Y - \mu)^2$ אז $X \geq a$ (נאצל תמיד) אז $|Y - \mu| \geq \varepsilon$

$$P((Y - \mu)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E((Y - \mu)^2)}{\varepsilon^2}$$

במילים אחרות: אם Y א.נ.ל.ל. עם תוחלת μ ושונות $V(Y)$ אז

$$P(|Y - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}$$

הוכחת הצורה הראשונה

נניח ש- $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$, אם-כך אז צביל (המיוסל) $\bar{X}_n$:

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X_i)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \varepsilon > 0$$

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

הצורה נכונה ל- $E(X) < \infty$, כלומר: $E(X) = E(X_+) - E(X_-) < \infty$ כאשר $E(X_+) < \infty$ ו- $E(X_-) < \infty$.

$$E(X_+) < \infty \rightarrow E(X_+ + 1) < \infty$$

$$Y = [X_+] + 1 \rightarrow Y \leq X_+ + 1 \rightarrow E(Y) \leq E(X_+) + 1 < \infty$$

$$E(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} np(n-1 \leq X < n) < \infty$$

$$X_+ = W + R, \quad W = X_+ \cdot \mathbb{1}_{\{X_+ \leq M\}}, \quad R = X_+ \cdot \mathbb{1}_{\{X_+ > M\}}$$

$$E(R) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0, \quad \text{כיון ש-} V(W) < \infty$$

הוכחת הצורה השנייה

נניח $\varepsilon > 0$, נבחר M מספיק גדול כך ש- $E(R) < \varepsilon$ ו- $X = W + R$ כאשר $W = X_+ \cdot \mathbb{1}_{\{X_+ \leq M\}}$.

$$X_n = W_n + R_n \quad \text{כאשר } W_n = X_n \cdot \mathbb{1}_{\{X_n \leq M\}}, \quad R_n = X_n \cdot \mathbb{1}_{\{X_n > M\}}$$

$$|\bar{X}_n - \mu| = \left| \frac{(W_1 + R_1) + \dots + (W_n + R_n)}{n} - \mu \right| \leq \left| \frac{W_1 + \dots + W_n}{n} - \mu \right| + \frac{|R_1|}{n} + \dots + \frac{|R_n|}{n}$$

שים לב לשתי נקודות:

$$E\left(\sum_{i=1}^n \frac{|R_i|}{n}\right) < \varepsilon \quad \text{ולכן} \quad E(|R_i|) < \varepsilon$$

כי $W_1, W_2, \dots$ הם א"מ ב"ר.

$$E(W_n) = \mu_n \quad \text{כאשר} \quad |E(W_n) - E(W)| < \varepsilon$$

$$E(|\bar{X}_n - \mu|) \leq E|\bar{W}_n - \mu| + \sum_{i=1}^n \frac{E|R_i|}{n} \leq$$

$$\leq E|\bar{W}_n - \mu| + |\mu' - \mu| + \sum_{i=1}^n \frac{E|R_i|}{n} \quad (\mu' = \mu)$$

(תבנית): $W_1, W_2, \dots$ הם א"מ ב"ר לכן חוקים עם תלות מ', אז $E|\bar{W}_n - \mu| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$E|\bar{X}_n - \mu| \leq 3\varepsilon$$

$$P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{E(|\bar{X}_n - \mu|)}{\delta}$$

חוק החזק של האסבריים (הצורה)

$$\bar{X}_n \xrightarrow{a.s.} \mu \quad \text{אם} \quad X_1, X_2, \dots \quad \text{הם א"מ ב"ר עם תלות מ' אז}$$

(חוק החזק אחר את הניסוח השני של חוק החזק).

ההוכחה מובנה בצורה פשוטה.

① א"ש קולמאטורוב

נניח $X_1, X_2, \dots$ סדרה סופית של א"מ ב"ר עם שונות סופית ותלות מ'.

$$S_k = X_1 + \dots + X_k \quad (k=1, \dots, n) \quad \text{אז}$$

$$P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(S_n)}{\varepsilon^2}$$

$$\text{כל, } \sum_{n=1}^{\infty} V(X_n) < \infty$$

(2) משפט: יהיו $X_1, X_2, \dots$ חתומים. למה?

S_n מתכנסת a.s.

(3) הוכחת אי קולמוסיות

למה? ומה, (שצריך להוכיח) $A_k = \{ |S_j| < \varepsilon \}$ ויש לה שלב, $A_1, \dots, A_n$ וכן.

כאן-כן, A_k מוגדרת על ידי $X_1, \dots, X_k$, כך, X_{k+1} !

A_{k+1} ! X_n

$$\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

$$E(S_n^2) \geq \sum_{k=1}^n E(S_n^2 1_{A_k}) =$$

$(\bigcup_{k=1}^n A_k)^c$ על S_n^2 את התוחלת של S_n^2 על $(\bigcup_{k=1}^n A_k)^c$?

$$\geq \sum_{k=1}^n E[(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k) + (S_n - S_k)^2) 1_{A_k}] \geq$$

$$S_n^2 = (S_k + (S_n - S_k))^2 \text{ פתח}$$

$$\geq \sum_{k=1}^n E[S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k)] =$$

$$0 \leq E((S_n - S_k)^2 1_{A_k})$$

כי זה חיובי

$$\stackrel{1}{=} \sum_{k=1}^n E(S_k^2 1_{A_k})$$

$$\sum X_{k+1}$$

הוא?

המשפט ... (הוכחה ע"י קורנארד)

$$E(S_n^2) \geq \dots \geq \sum_{k=1}^n E[(S_k^2 + 2S_n(S_n - S_k)) 1_{A_k}] \stackrel{(4)}{=} \sum E(S_k^2 1_{A_k}) \geq \\ \geq \sum_{k=1}^n \varepsilon^2 P(A_k) = \varepsilon^2 P(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \varepsilon)$$

4. הסתברות שיוצא:

$$E[1_{A_k} S_k (S_n - S_k)]$$

$$1_{A_k} \quad S_k \in \sigma(X_1, \dots, X_k)$$

$$(X_{k+1} + \dots + X_n) \in \sigma(X_{k+1}, \dots, X_n)$$

$$E(1_{A_k} \cdot S_k (S_n - S_k)) = E(1_{A_k}) \cdot E(S_k (S_n - S_k)) = 0 \quad \leftarrow \text{מ"מ בלתי תלוי} \\ = E(X_{k+1}) + \dots + E(X_n)$$

על פי

$$\sum_{n=1}^{\infty} V(X_n) < \infty \quad \text{אם } X_1, X_2, \dots \text{ סדרת מ"מ בלתי תלויים. אז } S_n \text{ מתכנס ב-} L^2.$$

$$E(X_i) = 0 \quad \leftarrow \text{בנייה של המסלול: } X_1, X_2, \dots \text{ הם שונות סופיות}$$

$$S_n = Y_1 + \dots + Y_n \quad \text{אז } Y_n = \frac{X_n}{n}$$

$$V(Y_n) = \frac{1}{n^2} V(X_n) = \frac{1}{n^2} V(X_1) \rightarrow \sum V(Y_n) < \infty$$

ומכאן S_n מתכנס ב- L^2 .

$$\text{המשפט של קוונטר: תהי } \{a_n\} \text{ סדרת מספרים, } \{b_n\} \text{ סדרה חיובית } \\ \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{אם } \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} \text{ מתכנסת (כלומר } n \rightarrow \infty \text{)}$$

$$\omega \in \Omega \quad S_n = X_1 + \frac{X_2}{2} + \dots + \frac{X_n}{n}$$

$$S_n(\omega) = X_1(\omega) + \frac{X_2(\omega)}{2} + \dots + \frac{X_n(\omega)}{n} \quad (a_i = X_i(\omega), b_i = i)$$

$$\text{במיוחד } \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{ב-} L^2 \text{ קוונטר.}$$

מסקנה: (גירסה של חוק החזק של הגדלים)

$$\text{אם } X_1, X_2, \dots \text{ מ"מ בלתי תלויים, אז } \bar{X}_n \rightarrow 0 \text{ ב-} L^2.$$

כאשר השונות של X סופית.

מסקנה: (חוק חזק של הגדלים עם שונות סופית)

$$X_1, X_2, \dots \text{ מ"מ בלתי תלויים עם שונות סופית. נסמן } E(X_1) = \mu \text{ אז } \bar{X}_n \xrightarrow{L^2} \mu.$$

$$\text{הוכחה: נסמן } Y_n = X_n - \mu, \text{ אז } Y_n \text{ מתכנסת ב-} L^2 \text{ וקוונטר.}$$

הוכחת המשפט: נניח שמתקיים $S_n(\omega)$ היא סדרת קושי. $S_n(\omega)$ היא סדרת קושי.

$$\sup_{j,k \geq n} |S_j(\omega) - S_k(\omega)| < \varepsilon \quad \text{כך ש} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{רצונית}$$

נבחר את המאונד $\varepsilon > 0$

$$B_{n,\varepsilon} = \{ \omega \mid \sup_{j,k \geq n} |S_j(\omega) - S_k(\omega)| \geq \varepsilon \}$$

$$C_{n,\varepsilon} = \{ \sup_{k \geq n} |S_{n+k} - S_k| \geq \varepsilon/2 \}$$

$$|S_j(\omega) - S_k(\omega)| \geq \varepsilon \quad \text{אז} \quad B_{n,\varepsilon} \subseteq C_{n,\varepsilon} \quad \text{לפי זה}$$

$$|S_k(\omega) - S_n(\omega)| \geq \varepsilon/2 \quad \text{או} \quad |S_j(\omega) - S_n(\omega)| \geq \varepsilon/2 \quad \text{כל אחד מהם}$$

$$\omega \in \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_n B_{n,\varepsilon} \subseteq \bigcup_{\varepsilon > 0} \bigcap_n C_{n,\varepsilon} \quad S_n(\omega) \text{ לא סדרת קושי}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sup_{k \geq n} |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon/2) = 0 \quad \text{אם כן, ההסתברות שזה יקרה}$$

(שזה לא קודמאורוב וקרא)

$$P(\max_{1 \leq k \leq r} |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon/2) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^r V(X_{n+k})$$

$$P(\sup_{k \geq 1} |S_{n+k} - S_n| \geq \varepsilon/2) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{\infty} V(X_{n+k}) \quad \text{הכל הקורא נכון לכל } r, \text{ ואכן}$$

לפי זה שאם $\sum_{k=1}^{\infty} V(X_{n+k}) < \infty$ אז S_n היא סדרת קושי.

נ"מ את הונחת החזק של המספרים הסדורים, כאשר למעשה האקסס
לא קיים בהכרח המאונך השני.

הכיון זה כי שם $X_1, X_2, \dots$ הם א"מ ב"ר כ" $\sum V(X_n) < \infty$ א"י

$\sum (X_n - \mu_n)$ מתכנס כאשר μ_n היא תוחלת של X_n .

נניח אם $\sum \mu_n < \infty$ א"י, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ מתכנס ב"ר.

דוגמאות

(א) נניח $X_1, X_2, \dots$ הם א"מ ב"ר כ" $V(X_n) = \frac{1}{n^2}$, $E(X_n) = \frac{1}{n^2}$

(ב) אם $S_n = X_1 + \dots + X_n$, כולות $E(S_n) = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ והוא מתכנס.

$S_n = X_1 + \dots + X_n$, $V(S_n) = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ ואם הוא מתכנס כאשר $n \rightarrow \infty$

אכן S_n מתכנס ב"ר.

(ב) נניח כי $X_1, X_2, \dots$ הם א"מ ב"ר הנתונים האופן אחר $X_n \sim U(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

$$V(X_n) = E(X_n^2) = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x^2 \cdot \frac{n}{2} dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n}{2} = \frac{1}{n^2} \quad E(X_n) = 0$$

$$\sum V(X_n) < \infty \quad \text{ואכן} \quad S_n \sim \text{קונס} \cdot \frac{1}{n^2}$$

ב"ר אחרת אראות זאת: $Y_n \sim B(\frac{1}{2})$, שונות של א"מ ב"ר הוא $p(1-p)$

$V(Y_n) = \frac{1}{4}$, נגדיר $Z_n = \frac{2}{n} Y_n$ ואז $Z_n \sim \frac{1}{n}$ נגדיר $Z_n = \frac{2}{n} Y_n$, נניח א"מ

שוקל $\frac{1}{n}!$ $\frac{1}{n}$ הוסיפות $\frac{1}{2}$ לא אחר.

$$V(X_n) \leq V(Z_n - \frac{1}{n}) = V(Z_n) = \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}$$

$$V(X_n) = E(X_n - \mu_n)^2 \leq E(Z_n - \frac{1}{n})^2 \quad S_n \Leftarrow \text{מתכנס ב"ר.}$$

הוכחת המסלל (כאשר לא נבחרו ק"מ המאונך השני)

נניח $X_1, X_2, \dots$ סדרת א"מ ב"ר ש"ם עם תוחלת סופית $(E|X_1| < \infty)$

(א) $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{ב"ר}} \mu$ (סדרת הממוצעים).

$$Y_n = \begin{cases} X_n & |X_n| \leq n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{נגדיר א"מ } Y_n$$

$$Y_n = X_n \mathbb{1}_{C_n}, \quad C_n = \{|X_n| \leq n\}$$

אנדר: (סמן $A_n = \{Y_n \neq X_n\}$) $A_n = C_n^c$, $P(A_n | \cdot) = 0$ א"י

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(|X_1| > k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(|X_1| \geq k) \leq E(|X_1|) < \infty \quad \text{הוכחת האנדר:}$$

$$E(Z) \leq E(|X_1|), \quad Z = \lfloor |X_1| \rfloor \quad \text{נגדיר}$$

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(Z=k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Z \geq k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(|X_1| \geq k)$$

אכן א"י החזק ה"ם 1 של המסלל של מו"ם קטן

אנדר: הוסיפות 1 $X_n = Y_n$ הוא n מספר סדור.

אם $\bar{Y}_n \rightarrow 0$? $\bar{Y}_n$: $\bar{X}_n$ כן (ההפך) $\bar{X}_n$?

$$|E(X_n) - E(Y_n)| = |E(X_n 1_{A_n})| \leq E(|X_n| 1_{A_n}) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X \geq k)$$

$$E(|X_n| 1_{A_n}) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X \geq k)$$

$$z \leq |X_1| \leq z+1 \Rightarrow \sum_{k=z}^{\infty} P(X_1 \geq k) \leq E(|X_1|) \leq \sum_{k=z}^{\infty} P(X_1 \geq k) + 1$$

$$\frac{M_1 + \dots + M_n}{n} \rightarrow E(X_1) = \mu \quad \text{כיון } E(Y_n) = \mu_n \quad \text{אם } \mu_n \rightarrow \mu$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \mu_i)}{n} \rightarrow 0 \quad \text{אם } \mu_i \rightarrow \mu$$

$$Y_1 + \frac{Y_2}{2} + \dots + \frac{Y_k}{k} \quad \text{כיון } V(Z) \leq E(Z^2) \quad Z \text{ אף } Z$$

$$V\left(Y_1 + \frac{Y_2}{2} + \dots + \frac{Y_k}{k}\right) \stackrel{(1)}{=} V(Y_1) + V\left(\frac{Y_2}{2}\right) + \dots + V\left(\frac{Y_k}{k}\right) =$$

$$= V(Y_1) + \frac{V(Y_2)}{2^2} + \dots + \frac{V(Y_k)}{k^2} \leq \sum_{n=1}^k \frac{E(Y_n^2)}{n^2} =$$

$$\stackrel{(2)}{=} \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} E(Y_n^2 1_{\{j < |Y_n| \leq j+1\}}) \stackrel{(3)}{=}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=j+1}^k \frac{1}{n^2} E(Y_n^2 1_{\{j < |Y_n| \leq j+1\}}) \stackrel{(4)}{\leq}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n=j+1}^k \frac{1}{n^2} E(X_1^2 1_{\{j < |X_1| \leq j+1\}}) \stackrel{(5)}{\leq}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{k-1} E(X_1^2 1_{\{j < |X_1| \leq j+1\}}) \cdot \frac{1}{j} \leq$$

$$\leq C \sum_{j=0}^{k-1} E\left(\frac{X_1^2}{j+1} 1_{\{j < |X_1| \leq j+1\}} + E(X_1^2 1_{\{|X_1| \leq 1\}})\right) \stackrel{(6)}{\leq}$$

$$\leq C' \sum_{j=1}^k E(|X_1| 1_{\{j < |X_1| \leq j+1\}}) + 1 \stackrel{(7)}{\leq}$$

$$\leq C' E(|X_1|) + 1 < \infty$$

$$\text{כיון } \sum V\left(\frac{Y_k}{k}\right) < \infty$$

$$(Y_1 - \mu_1) + \frac{(Y_2 - \mu_2)}{2} + \dots + \frac{(Y_k - \mu_k)}{k}$$

$$\frac{(Y_1 - \mu_1) + \dots + (Y_k - \mu_k)}{k} \quad \text{אם } \mu_i \rightarrow \mu$$

$$\mu \leftarrow \frac{M_1 + \dots + M_k}{k}, \quad 0 \leftarrow |\bar{X}_n - \bar{Y}_n|$$

$$0 \leftarrow \frac{(X_1 - \mu) + \dots + (X_n - \mu)}{n} = \bar{X}_n - \mu \quad \text{כיון } \mu$$

הסתברות $Y_1, Y_2, \dots$

כיון $Y_1, Y_2, \dots$ (1)

(2)

$$E(Y_n^2) = E(Y_n^2 1_{\{0 < |Y_n| \leq 1\}}) + \dots$$

$$+ \dots + E(Y_n^2 1_{\{n-1 < |Y_n| \leq n\}})$$

(3) הסיכוי Y_n יהיה n

$$E(Y_n^2 1_{\{j < |Y_n| \leq j+1\}}) \leq E(X_n^2 1_{\{j < |X_n| \leq j+1\}}) = (4)$$

$$\stackrel{(5)}{=} E(X_1^2 1_{\{j < |X_1| \leq j+1\}})$$

$$\sum_{k=j+1}^k \frac{1}{n^2} < \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{C}{j}$$

(5)

$$E\left(\frac{X_1^2}{j} 1_{\{j < |X_1| \leq j+1\}}\right) \leq$$

(6)

$$\leq 2E\left(\frac{X_1^2}{j+1} 1_{\{j < |X_1| \leq j+1\}}\right) \leq$$

$$\leq 2E(|X_1| 1_{\{j < |X_1| \leq j+1\}})$$

(7)

($X_n - X$ ነ ቅርንጫፍ) $X=0$ ጥንቃቄ ጥንቃቄ ነበረ 0.5

$$P(\cup A_n) = 1$$

$$P(A_n) \geq 1 - \varepsilon \quad P(A_n^c) < \varepsilon \quad \exists k, n \geq N \text{ s.t. } p \in N \text{ e.}$$

$$P(A_n^c) \rightarrow 0 \quad (\text{יותר פשוט})$$

צבעי קולטת הורמון

$$S_n^{(c)} = X_1^{(c)} + \dots + X_n^{(c)} \quad |X_i| \cdot X_n^{(c)} = X_n \cdot \mathbb{1}_{\{|X_n| \leq c\}}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} V(X_n^{(c)}) \quad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} E(X_n^{(c)}) \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > c) \quad (1c)$$

(ii) אם $\bar{c} \in \bar{c}_0$ ו- $\bar{c}$ מתחננים עבור c אז c נכלל ב- S_n ונתונים כ- c .

התכנסות כִּי מְשֻׁלָּטִים הִתְחַבְּרָה הִתְחַבְּרָה הִתְחַבְּרָה $A_n = \{\omega / X_n(\omega) \neq X_n^c(\omega)\}$, $\Sigma P(A_n)$, וְכֵן

כאשר ההסתברות 1 קיים $N(\omega)$ כך ש $S_n(\omega) = S_n^{(c)}(\omega)$ וכל $n > N(\omega)$ כל קהל

תוחלת מחירה

$$E(Y \cdot 1_A) = E(X \cdot 1_A) \quad A \in \mathcal{G} \quad \text{כל } (2) \quad \mathcal{G} \text{ של } Y \text{ יחיד } Y(1)$$

התשובה היא: $E(x|g)$ (לדוגמה: $E(x|g)$)

$$4. E(X) = E(X / \{\phi, \Omega\})$$

18.1.09

תוחלת מותנה

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מ"ע, X מ"מ, $\sigma(X) \subseteq \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{F}$ (ס-לד)

g יכול להיות נוצר ע"י Y .

אזכור $E(X|g)$ שמואם כס בתור $E(X|Y)$ במקרה שבו $\sigma(Y)=g$.

$E(X|g)$ הוא מ"מ למקיים את תכונות:

(1) אצד אפי g כל $A \in g$ $E(X1_A) = E(E(X|g)1_A)$

שאלה: מה אכס"ח לקיים תנאי זה? במקרים מיוחדים (כאשר יש לוונת מלונות X - Y)

אם $Y=g$! אז $E(X|g)$ זכס את $E(X|g)$ האוסן אפולל.

הוכחה בקורס טל"ס:

$$y = (y_1, \dots, y_n) \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^n$$

$$X, Y \in H, \quad \langle X, Y \rangle = E(XY)$$

טענה: H הוא $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ עם מונח של

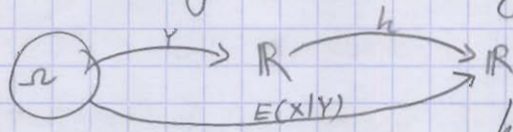
Z : H הוא המצידים עם מונח של

g : g לזה שלנצ ע"י הפונקציה

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & t > \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$A \in g \quad \text{נקח} \quad X = E(X|g) + Z$$

$$E(X1_A) = E(E(X|g) + Z)1_A = E(E(X|g)1_A) + \underbrace{E(Z1_A)}_{=0} = E(E(X|g)1_A)$$



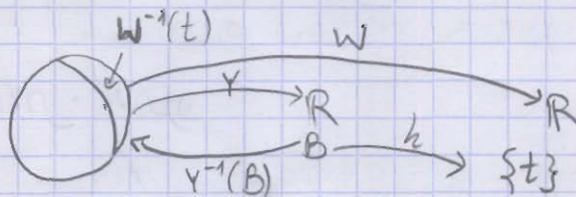
$$\sigma(Y) = g, \quad Y \text{ מ"מ}$$

$$h(y) = E(X|Y=y)$$

$$W = E(X|Y) \quad \text{לדפ פלסטר} \quad \sigma(Y)$$

$B \in \sigma(Y)$ קבוצה כי למכסר $\sigma(Y)$ פל, קבוצה B קטא כל $B \in \sigma(Y)$

$$W^{-1}(\{t\}) \quad \text{כך} \quad W^{-1}(t) = Y^{-1}(B)$$



דוגמה:

Y יוצרת את ה- σ -לדל שלנצ ע"י החלוקה $[0, \frac{1}{3}), [\frac{1}{3}, \frac{3}{4}], [\frac{3}{4}, 1]$ על $\Omega = [0, 1]$

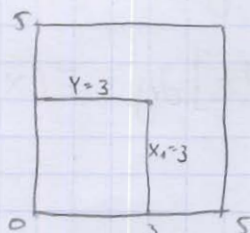
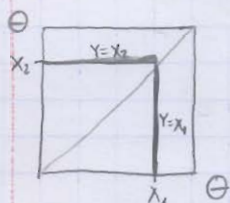
$$X = \text{צפיות} \quad ? = E(X|Y)$$

$$E(X|Y)(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \omega \in [0, \frac{1}{3}) \\ \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{13}{24} & \omega \in [\frac{1}{3}, \frac{3}{4}] \\ \frac{7}{8} & \omega \in (\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$h(0) = \frac{1}{6}, \quad h(1) = \frac{13}{24}$$

$$h(4) = \frac{7}{8}$$

$X_i \sim U(0, \theta)$, $Y = \max(X_1, X_2)$, X_1, X_2 זוגות בלתי תלויים



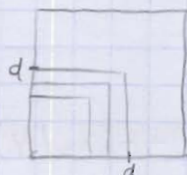
$Y=3$, $\theta=5$ נ"ח

$$\frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \cdot 3$$

$$\frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{3} = \frac{3}{4}t$$

$$E(X|Y) = \frac{3}{4}Y$$

$$E(X|Y=t) = \frac{3}{4}t$$



(כאן שנינוס נכון)

אנחנו מחפשים את $E(X|Y)$ עבור $0 \leq d \leq \theta$ וזהו X בתנאי Y

$$\int_0^d \int_0^d \frac{x_1}{\theta^2} dx_1 dx_2$$

תחביר של X בתנאי Y ב- $[0, d]^2$

$$\int_0^d \frac{3}{4}y \cdot \left(\frac{y}{\theta}\right) dy$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X_1 \leq y \text{ או } X_2 \leq y) = \dots$$

$$P(X_1 \leq y) \cdot P(X_2 \leq y) = \frac{y^2}{\theta^2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & 0 \leq y \leq \theta \\ \text{אחרת} & \end{cases}$$

$$\int_0^d \int_0^d \frac{x_1}{\theta^2} dx_1 dx_2 = \int_0^d \frac{3}{4}y \cdot \frac{y}{\theta} dy = \frac{6}{4\theta^2} \int_0^d y^2 dy = \frac{6}{4\theta^2} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^d$$

$$\frac{6d^3}{12\theta^2} = \frac{d^3}{2\theta^2}$$

התוצאה של X בתנאי Y היא $\frac{3}{4}Y$

נניח $E(X|Y)$ כאלו $E(X|Y)$ בתנאי Y

$$\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = f_{X|Y}(x|y)$$

$$(f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx)$$

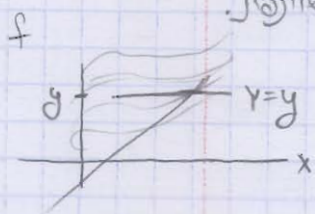
$$E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{הערך של } y \text{ בלבד} \\ \text{ולא } x \end{array} \right\}$$

$$E(E(X|Y) \mathbb{1}_C) = E(X \mathbb{1}_C)$$

$C \in \sigma(Y)$ וזהו C

$C = Y^{-1}(B)$ ו- B הוא קטע ב- $(\mathbb{R})$

$$E(X \mathbb{1}_C) = \int x f_X(x) \cdot \mathbb{1}_C dx$$



$$h(y) = E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x,y) dx = \int h(y) 1_C f_Y(y) dy = \int$$

אם x :

$$\iint x f_{X|Y}(x|y) 1_B f_Y(y) dx dy = \iint x f_{X,Y}(x,y) 1_B dx dy = \int$$

$$= \int 1_B \left[\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y) dx \right] dy = E(X 1_C)$$

אם $A \in \sigma(Y)$

$$E(X|Y) \stackrel{!}{=} E(X 1_A) = E(E(X|Y) 1_A) \\ E(X) P(A)$$

תכונות התוחלת האחרות:

(1) X ו- Y בלתי

$$E(X|Y) = E(X) \Leftrightarrow \text{בלתי תלוי, קובל.}$$

(2) $E(X|Y)$ היא ליניארית:

$$E(X_1 + X_2 | Y) = E(X_1 | Y) + E(X_2 | Y)$$

$$E(\lambda X_1 | Y) = \lambda E(X_1 | Y)$$

$$E(X_1 | g) \geq E(X_2 | g) \quad \text{כ.ת.}$$

$$X_1 \geq X_2$$

(3)

האזרחים: $C = \{E(X_2 | g) > E(X_1 | g)\}$, C אירועים בלתי תלויים ו- $P(C) = 0$

אם $P(C) = 0$

$$E(X|g_2) = E(E(X|g_1)/g_2)$$

$$g_2 \leq g_1 \leq \infty \quad \text{תורת האינטגרל}$$

21.1.09

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) > 0)$$

מאונן המצב

תנאיית התנאי

$$P(A/B) = E(1_A | 1_B)(\omega) \quad (\omega \in B = \text{תנאי גישה})$$

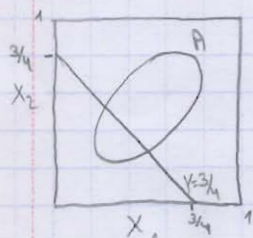
$$\sigma(1_B) = \{0, 1, B, B^c\}$$

$$E(1_A | 1_B)(\omega) = \begin{cases} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} & \omega \in B \\ \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} & \omega \in B^c \end{cases} \quad (P(B), P(B^c) > 0)$$



$$P(A/X=x) = E(1_A | X)(\omega)$$

$(X(\omega) = x)$, מאונן A , X

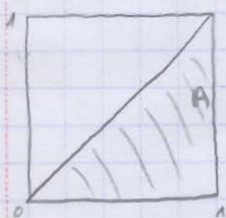


$$P(A/Y=y)$$

$Y = X_1 + X_2$, מאונן X_1, X_2

$$P(A/Y=3/4)$$

$$\Omega = [0, 1]^2$$



$$P(A/Y=y)$$

$$P(A/Y=y) = 1/2$$

$$A = \{X_1 > X_2\}$$

$$E(1_A | Y)(\omega) = \begin{cases} 0 \\ 1/2 \end{cases}$$

$\omega = (\omega_1, \omega_2), \omega_1 + \omega_2 = 1$
אחידות

התכנסות בהתפלגות ואמפלט (הכנסה)

השערה: $X_1, X_2, \dots$ סדרת n נאמנים $\{X_n\}$ שמתפלגות X אם:

$$X_n \xrightarrow{D} X \quad \text{במקרה } F_{X_n}(t) \rightarrow F_X(t) \text{ לכל } t$$

$$P(X_n \leq t) \rightarrow P(X \leq t) \quad t$$

תנאיית של X_1

אמפלט: (הכנסה) (הארכי)

$$\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mu$$

$X_1, X_2, \dots$ מאונן $\bar{X}_n$ עם פונקציה צפיפות אחידה

נניח של $X_1, X_2, \dots$ להם בעלי תוחלת μ (היה μ),

$$Y_n \xrightarrow{D} Y \quad Y_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}$$

האמפלט: $X_1, X_2, \dots$ מאונן $\bar{X}_n$ עם תוחלת μ ופונקציה צפיפות אחידה

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2) \quad \sigma^2 = V(X_1)$$

$$M_{Y_n}(t) = E(e^{t Y_n}) = E(e^{t \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}}}) = E(e^{\frac{t}{\sqrt{n}} X_1} \cdot e^{\frac{t}{\sqrt{n}} X_2} \cdot \dots \cdot e^{\frac{t}{\sqrt{n}} X_n}) =$$

$$= [M_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{n}})]^n = [1 + 0 + \frac{\sigma^2 t^2}{2n} + \frac{E(X_1^3) t^3}{\sqrt{n}^3} + \dots]^n \rightarrow e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

פונקציה צפיפות אחידה של $N(0, \sigma^2)$

$$(1 + \frac{c}{n} + \dots)^n \rightarrow e^c$$

