

אנחה הסתברות כללית

תוצאות: אנחה הסתברות חדשה:

ל - קבוצה סופית או מת-גדלה של Ω

$$P: 2^\Omega \rightarrow [0,1]$$

P - פונקציה הסתברות.

קבוצת פונקציה $P: \emptyset \rightarrow 0, P(\Omega) = 1$

2. (סדרת אירועים $A_1, A_2, \dots$ היא סדרה של תת-קבוצות של Ω)

$$P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$$

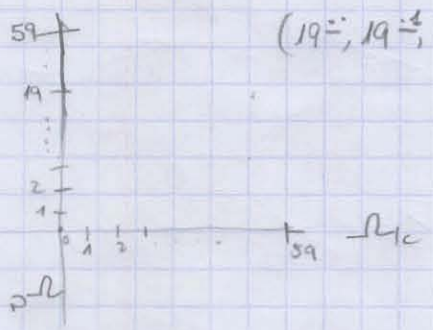
האקסיומה של פונקציה הסתברות "פאוס" $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ נכונה:

יש אנשים, א, ב, וצאצאים אחרים. אפסל אוסמאן בלטה אקדמית בן 19 - 20. אוסמאן שאי שמעל האשין אחרי 20 שנה 20 דקות. (אם זה שמעל קופס). מה ההסתברות לעיגולה?

הכללה (ההצדקה): $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, 59\}$ $(19, 19, \dots, 19)$

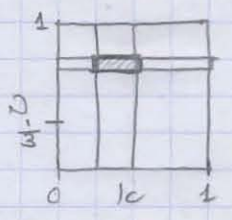
אנשים א-תוצאות ואחידות.

אנשים אפסל?



שנת הולדת של א	שנת הולדת של ב
0	0...19
1	0...20
2	0...21
...	...
18	0...37
19	0...38
20	1...39
...	...
59	40...59

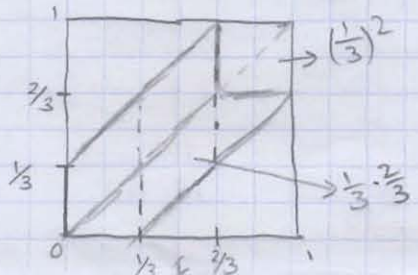
יש צורה כלכלית של קבוצה של תת-קבוצות של Ω . זה מורכב מפי!



הכללה הרצויה

א-תוצאות (אנחה של ריבוע היא אנחה רצויה)

אחידות (הסתברות קטל תוצאה יק באורט ולא באיקואו של רצויה)



הסתברות $= (\frac{1}{3})^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$

אם σ -אלג' (אם אלים) אז י. מליה על האמירות. $\frac{1}{\sigma}$? ! , והסתברות
היה 0.

אנחנו הסתברות $\mathcal{F}$:

אנחנו משאלה רבים : Ω -קב' & נקודות , $\mathcal{P}$ -פונ' הסתברות
 $\mathcal{F}$ -קבוצה של תת קבוצות של Ω (האטמים מאוחדות) האקסיומת את
התכונות הבאות: $\emptyset \in \mathcal{F}$

$$\Omega - A = A^c \in \mathcal{F} \quad \text{אם } A \in \mathcal{F}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F} \quad \text{אם } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$$

הקבוצה $\mathcal{F}$ האקסיומת תכונות אלה נקרא σ -לדור (אנא $\mathcal{F}$ -field)
תכונות פונ' ההסתברות:

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0, \quad P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{אם } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \text{ זית בלתי תלוי}$$

(P לא מוגדרת על קבוצה חלקית!).

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\mathcal{F}$ היא σ -אלגברה (ס-אלגברה) כלומר מקיימת את התכונות הבאות:

(א) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ב) אם $A \in \mathcal{F}$ אזי $A^c \in \mathcal{F}$

(ג) אם $A_1, \dots \in \mathcal{F}$ אז $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

אם נחליף את $\bigcup$ בהתאמה יתקבלת תכונה:

(ד) אם $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ אז $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{F}$

קבוצת קבוצות שהיא σ -אלגברה (ס-אלגברה). כל קבוצה A היא קבוצת אלווה.

דוגמאות

(א) $\Omega = \{0, 1\}$ $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1\}\}$ כאן $\mathcal{F}$ היא קבוצת החזקה

(ב) Ω סופית

$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ היא σ -אלגברה ומה שהיא 2^{Ω} היא סופית

אם Ω אינו סופי σ -אלגברה (או אלגברה) חייבת להיות קבוצת החזקה.

$\Omega = \{1, 2, 3\}$ $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3\}\}$

האקסיומה הבסיסית של אלגברה היא σ -אלגברה

(ג) משתנים עצמאיים זהים $\Omega_n = \{0, 1\}^n$ $\mathcal{F}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\mathcal{F}_\infty = \{x_1, x_2, \dots\}$ $\Omega_\infty = \{0, 1\}^\infty$

~~$x_1, \dots, x_n$ כלים $P(x_{n+1} = 1/x_1, \dots, x_n) = 1/2$~~

כאשר: $P(A_{n+1}, 1/B_{x_1, \dots, x_n}) = 1/2$

$A_{n+1}, 1 = \{x_1, x_2, \dots\}$ $x_{n+1} = 1$

$B_{x_1, \dots, x_n} = \{(y_1, y_2, \dots) \in \Omega, y_i = x_i\}$ כל $x_i \in \{0, 1\}$

$P(B_{x_1, \dots, x_n}) = (1/2)^n$ $\{0, 1\}^\infty \ni (x_1, \dots, x_n)$ כל

$C = \{(x_1, \dots) : \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n \text{ קיים}\}$ (צפוף)

נניח שנתונות לנו הקבוצות $B_{x_1, \dots, x_n}$ אלו הם כלים אקזיס

חיתוכים/איחודים אלווסוסים. (אך בהנחה כי אנחנו, וניתן להשתמש בזה

האלוס ספירי, כיצד נוכל לבנות את C ?

נסמן: אם $(x_1, \dots)$ אזי $\bar{x}_n = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

$C = \{(x_1, x_2, \dots) : \bar{x}_n \text{ מתכנס}\}$

האם $\bar{X}_n$ מתכנס?

$$|\bar{X}_n - \bar{X}_m| < \varepsilon \quad \text{für } p \geq p_N \quad n, m > N \quad \text{für } p > N \quad \text{für } \varepsilon > 0 \quad \text{für}$$
$$|\bar{X}_n - \bar{X}_m| < \frac{1}{k} \quad \text{if } n, m > N \quad \text{for } p \in N \text{ of } K \text{ of } (*)$$
$$D_{m,n,k} = \{ (x_1, x_2, \dots), |\bar{x}_n - \bar{x}_m| < \frac{1}{k} \} \quad m, n, k \text{ — } \text{доп}$$

הבה נסתכל על $B_{x_1, \dots, x_n}$ ונראה כי $\frac{\partial}{\partial x_i} B_{x_1, \dots, x_n} = 0$ לכל i .

$$\bigcap_k \bigcup_N \bigcap_{n,m \in \mathbb{N}} D_{n,m,k} = C$$

2) 2000 (2000)

$$\Omega = \{0,1\}^\infty = \{(x_1, x_2, \dots) \mid x_i = 0,1 \text{ } i=1,2,\dots\}$$

$$B_{x_1, \dots, x_n} = \{(y_1, y_2, \dots) \in \Omega \mid y_i = x_i \text{ } \forall 1 \leq i \leq n\}$$

$$D_{n,m,k} = \{(x_1, x_2, \dots) \in \Omega \mid |x_n - x_m| < \frac{1}{k}\}$$

המשפט: אי-הסדיר את הקבוצה $\{(x_1, x_2, \dots) \in \Omega \mid \lim x_n \text{ קיים}\}$ האמצעות חיתוכים

$B_{x_1, \dots, x_n}$ ואיחודים בני מניה של קבוצות אפסיים

$$= \bigcap_{n,m \in \mathbb{N}} D_{n,m,k} \quad (\text{כיום של הקבוצה})$$

$$\{(x_1, x_2, \dots) \in \Omega \mid |\bar{x}_n - \bar{x}_m| < \frac{1}{k} \text{ } n, m \geq N\}$$

$$= \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n,m \geq N} D_{n,m,k} \quad \text{ואם סגרי הקבוצה הסגורה?}$$

$$\{(x_1, x_2, \dots) \in \Omega \mid |\bar{x}_n - \bar{x}_m| < \frac{1}{k} \text{ } \forall n, m \geq N\} \text{ קיים } N \text{ כך ש}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n,m \geq N} D_{n,m,k} \quad \text{ואם סגרי הקבוצה הסגורה?}$$

$$\{(x_1, x_2, \dots) \in \Omega \mid |\bar{x}_n - \bar{x}_m| < \frac{1}{k} \text{ } \forall n, m \geq N\} =$$

$$\{(x_1, x_2, \dots) \in \Omega \mid \bar{x}_n \text{ סדרת קושי}\}$$

אמרו: אם ילד-סדרה האם את כל קבוצות $B_{x_1, \dots, x_n}$ אכן הוא אחד

$$\{(x_1, x_2, \dots) \in \Omega \mid \lim \bar{x}_n \text{ קיים}\}$$

אחד הקבוצה $\{(x_1, x_2, \dots) \in \Omega \mid \lim \bar{x}_n = \frac{1}{2}\}$ (אפשר כן סדרה סדרה האם

את הקבוצה $B_{x_1, \dots, x_n}$

$$F_{n,k} = \{(x_1, \dots) \in \Omega \mid |\bar{x}_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{k} \text{ } \forall n, m \geq N\}$$

$$\bigcap_k \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{n,k} \quad (\text{חשבו את החיתוך, הנקודה כ' ידועה מההגדרה})$$

אפשר עובדות פשוטות:

הקבוצה של הקבוצה של הקבוצה

(א) קבוצת החיתוך של הקבוצה של הקבוצה

(ב) נניח ש $\bigcap_{i \in I} F_i$ היא סדרה סדורה של I קבוצת אפסיים,

אזי $\bigcap_{i \in I} F_i$ גם סדרה סדורה. נסמן $\bar{x}_i$ את החיתוך הנניח

(הקבוצה של הקבוצה של הקבוצה של הקבוצה)

א. $\bar{x}_i \in F_i$ כן $\bar{x}_i \in F_i$ ואכן (אפשר בחיתוך)

(ב) $A \in \mathcal{F}$ ממש. $A^c \in \mathcal{F}$, כי עבור $\omega \in \Omega$ מתקיים $\omega \in A^c$ (כי $\omega \notin A$).
 מכאן $A^c \in \mathcal{F}$.

(ג) $A_n \in \mathcal{F}$, $n=1,2,\dots$ ממש, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$?

נניח $\omega \in \bigcup_n A_n$, אז $\omega \in A_n$ עבור n מסוים. לכן $\omega \in \bigcup_n A_n$.

נניח $\omega \notin \bigcup_n A_n$, אז $\omega \notin A_n$ לכל n . לכן $\omega \notin \bigcup_n A_n$.

נניח $\omega \in \bigcup_n A_n$, אז $\omega \in A_n$ עבור n מסוים. לכן $\omega \in \bigcup_n A_n$.
 נניח $\omega \notin \bigcup_n A_n$, אז $\omega \notin A_n$ לכל n . לכן $\omega \notin \bigcup_n A_n$.



$P_1 = \{A_1, \dots, A_5\}$
 $P_2 = \{B_1, B_2\}$

$\mathcal{F} =$ קבוצת כל הקבוצות שהם איחודים של איברים של P_1 (כלומר P_1 סופית).

חשבו את $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$. $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots\}$ כאשר $A_i \cap A_j = \emptyset$ לכל $i \neq j$.
 אם $\omega \in \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ אז $\omega \in A_i$ עבור i מסוים. לכן $\omega \in \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$.
 אם $\omega \notin \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$ אז $\omega \notin A_i$ לכל i . לכן $\omega \notin \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$.

נניח $\omega \in \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$, אז $\omega \in A_i$ עבור i מסוים. לכן $\omega \in \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$.
 נניח $\omega \notin \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$, אז $\omega \notin A_i$ לכל i . לכן $\omega \notin \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$.

(ד) אולי נצטרך בתור $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ את $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ שזהו $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

נניח $\omega \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, אז $\omega \in \mathcal{F}_1$ או $\omega \in \mathcal{F}_2$. לכן $\omega \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.
 נניח $\omega \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, אז $\omega \notin \mathcal{F}_1$ ו- $\omega \notin \mathcal{F}_2$. לכן $\omega \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

הערה: נראה שהחבורה $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ היא $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ שזהו $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.
 נניח $\omega \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, אז $\omega \in \mathcal{F}_1$ או $\omega \in \mathcal{F}_2$. לכן $\omega \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.
 נניח $\omega \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, אז $\omega \notin \mathcal{F}_1$ ו- $\omega \notin \mathcal{F}_2$. לכן $\omega \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$.

הערה: A קבוצה של תתי קבוצות של Ω . נניח $\omega \in A$ (כלומר $\omega \in A$).
 נניח $\omega \notin A$, אז $\omega \notin A$. לכן $\omega \notin A$.

לעיתים קרובות נמצאים אנשים שחושבים ש- A היא תתי קבוצה של Ω (כלומר $\omega \in A$).
 נניח $\omega \in A$, אז $\omega \in A$. לכן $\omega \in A$.
 נניח $\omega \notin A$, אז $\omega \notin A$. לכן $\omega \notin A$.

קבוצות.

(1) $a \leq b$ (כלומר $a \leq b$) הוא קבוצת בוא. נניח $\omega \in a$ (כלומר $\omega \in a$).
 נניח $\omega \notin a$, אז $\omega \notin a$. לכן $\omega \notin a$.

$[a, b] = \bigcap_n (a_n, b_n)$ $a_n \leq a$ $b_n \geq b$

$$[a, b)$$

$$[a, b)^c = [0, a) \cup [b, 1]$$



$$[0, a) = \bigcup_{a_n \nearrow a} [0, a_n)$$

ואתן דבר אחרים מהסוג $(a, b]$.

(ב) אחת של קטעים וחיתוך של קטעים הוא גם קטע בודד.

(ג) של קטע בת-אניה הוא קטע בודד.

$$I = [0, 1] \supseteq A = \{a_1, a_2, \dots\}$$

$$A_{i,k} = \{x \in I \mid |x - a_i| < 1/k\}$$

$$\bigcap_i A_{i,k} = \{a_i\}$$

$$\bigcup_i \{a_i\}$$

עצם...

נחיה את P מקטעים הפתוחים (או מקב' הפתוחות, כמו במונח (ξ_0, ξ_1)),
 של σ -אלבר בודד.

P משמר של הקטעים הפתוחים ולכן של הסגורים ומשן של איחודים (בהפרזים) של כאלו.
 עם $A \in \mathcal{A}$ היא קב' של הקטעים הפתוחים ולחילופין.

הרע' אחת היא כאלו $b \in B$ (ב קב' בודד) ! $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ כך $A_1 \subseteq A_2$

$$P(A_1) \leq P(b) \leq P(A_2) \quad \text{אזי, } A_1 \subseteq b \subseteq A_2$$

$$B = \{(x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R} / \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ קיים}\}, \quad \mathbb{R} = \{\xi_0, \xi_1, \dots\}$$

$$P(B) = ?$$

$$B = \bigcap_k \bigcup_N \bigcap_{n, m \geq N} D_{n, m, k}$$

$$A_{N,k} = \bigcap_{n, m \geq N} D_{n, m, k} \quad \text{קב' } N, k \text{ ונצטר}$$

$$\bigcup_N A_{N,k} \quad \text{עבור } k \text{ קבול}$$

$$P\left(\bigcup_N A_{N,k}\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=1}^j A_{N,k}\right)$$

$$P(B) = \lim_K P\left(\bigcap_{k=1}^K \bigcup_N A_{N,k}\right)$$

מקבלת את A והעברת את P על האלמנטים של קטע $\mathcal{A}$ (אומר על הקבוצות של $\mathcal{A}$)
 את כל האיחודים וחיתוכים (הסגורים של קטע בודד).

אזכר מעטית האידה (האחלון) שנתן אחרים את P אומר B כאלו יחיד.