

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

29 במאי 2017

1 תהליכים מסתעפים

בכל דור, כל פריט מוליד מספר צאצאים לפי התפלגות X באופן בלתי תלוי בכל שאר הפריטים ובכל הדורות הקודמים. מה הסיכון להכחדות?
ננסה לפרמל:

X יהיה משתנה מקרי המקבל ערכים מתוך $\{0, 1, 2, \dots\}$. תהי $(X_n^{(k)})_{n,k \geq 0}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים עם התפלגות שזהה לשל X . נגדיר $Z_0 = 1$, וכן

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^{(n)}$$

נסמן E את המאורע של הכחדה, כלומר

$$E = \{\exists n \ Z_n = 0\}$$

משפט 1.1 נניח כי $\mathbb{P}(X = 1) < 1$. אזי $\mathbb{E}X > 1$ אם ורק אם $\mathbb{P}(E^c) > 0$.

הוכחה: נסמן $m = \mathbb{E}X$, ונסמן $\mathcal{F}_n = \sigma\left(\{X_i^{(k)} \mid k < n\}\right)$. נראה כי $\mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = mZ_{n-1}$. נחשב:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(X_1^{(n-1)} + \dots + X_{Z_{n-1}}^{(n-1)} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} X_i^{(n-1)} \mathbb{1}_{\{i \leq Z_{n-1}\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(X_i^{(n-1)} \mathbb{1}_{\{i \leq Z_{n-1}\}} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}\left(X_i^{(n-1)}\right) \mathbb{1}_{\{i < Z_{n-1}\}} = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} m \mathbb{1}_{\{i < Z_{n-1}\}} = mZ_{n-1} \end{aligned}$$

כעת, אם $m < 1$, אזי

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_n | \mathcal{F}_{n-1})) = m\mathbb{E}(Z_{n-1}) = \dots = m^n$$

ולכן

$$\mathbb{P}(Z_n \geq 1) \leq \mathbb{E}Z_n \leq m^n \rightarrow 0$$

במקרה השני, $m = 1$, ונובע כי $\mathbb{E}(Z_n | \mathcal{F}_{n-1}) = Z_{n-1}$, כלומר (Z_n) מרטינגל ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_n$. ממשפט התכנסות המרטינגל נובע כי $Z_n \rightarrow Z_\infty$ כמעט תמיד. מצד שנית Z_n מקבל ערכים שלמים, וכן $\mathbb{P}(Z_n \rightarrow k) = 0$ לכל $k \neq 0$, ולכן $Z_\infty = 0$ כמעט תמיד. נפרמל:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n \rightarrow k) &= \mathbb{P}(\exists N \forall n \geq N \ Z_n = k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\forall n \geq N \ Z_n = k) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\forall N \leq n \leq M \ Z_n = k) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \underbrace{\mathbb{P}(Z_{n+1} = k | Z_n = k) \cdots \mathbb{P}(Z_M = k | Z_{M-1} = k)}_{\leq 1-\varepsilon} \underbrace{\mathbb{P}(Z_M = k | Z_{M-1} = k)}_{\leq 1-\varepsilon} \leq \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} (1-\varepsilon)^{M-N} = \lim_{N \rightarrow \infty} 0 = 0 \end{aligned}$$

נותר לנו המקרה השלישי, כלומר $m > 1$. אפשר להניח שהמשתנה X חסום, ובפרט $1 < m < \infty$, שכן אפשר להחליף את X בסדרה $X \wedge M$ עבור M גדול מספיק. נקבל שוב $M_n = \frac{Z_n}{m^n}$ מרטינגל. מרטינגל זה אי שלילי, ולכן מתכנס כמעט תמיד אל M_∞ . נשים לב כי

$$\{M_\infty > 0\} \subseteq \{Z_n = \theta(m^n)\} \subseteq E^c$$

כדי לקבל שההסתברות לשרידה חיובית, מספק להראות כי $\mathbb{P}(M_\infty = 0) < 1$. נטען כי $\sup_n \mathbb{E}(M_n^2) < \infty$ (תרגיל לבית) ובפרט $M_n \rightarrow M_\infty$ בנורמת L^2 (מהכיתה). לכן בפרט גם בנורמת L^1 , כלומר $\mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_n \rightarrow \mathbb{E}M_\infty$, כלומר $\mathbb{E}M_\infty = 1$, ובפרט $\mathbb{P}(M_\infty = 0) < 1$. ■

שאלה האם $\{M_\infty = 0\} = E^c$ כמעט תמיד?

תשובה תנאי הכרחי ומספיק הוא $\mathbb{E}(X \log(1+X)) < \infty$. בבית נראה את זה עבור המקרה בו $\text{Var}(X) < \infty$, ונחשב כי $\text{Var}(M_\infty) = \frac{\text{Var}(X)}{m(m-1)}$.