

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

22 במאי 2017

1 סכום של משתנים מקריים בלתי תלויים

משפט 1.1 יהיו $X_1, X_2, \dots$ משתנים מקריים בלתי תלויים עם $\mathbb{E}X_n = 0$ לכל n . אז אם X_n חסומים אזי

$$\sum_n \text{Var}(X_n) < \infty \iff \mathbb{P}\left(\sum_n X_n \text{ מתכנס} \right) = 1$$

אם X_n לא חסומים, רק הגרירה בכיוון $\Rightarrow$ נכונה.

הערה 1.2 למעשה ההוכחה מראה שאם X_n חסומים וכן

$$\mathbb{P}\left(\sup_N \left| \sum_{n=1}^N X_n \right| < \infty\right) > 0$$

אזי נובע כי

$$\sum_n \text{Var}(X_n) < \infty$$

מסקנה 1.3 יהיו סימנים מקריים בלתי תלויים, ויהי $a_1, a_2, \dots$ סדרה קבועה. אזי אם $\sum_{n=1}^N \varepsilon_n a_n$ לא מתכנס כמעט תמיד, ואם $\sum a_n = \infty$ אזי $\sum_{n=1}^N \varepsilon_n a_n$ לא חסומה לפי N כמעט תמיד.

נעבור לדון במשחק הטלות מטבע - אנחנו מטילים מטבע הוגן שוב ושוב עד שמופיע רצף יעד מסויים. שואלים מה תוחלת זמן המשחק. למשל אם הרצף הוא HT , תוחלת הזמן היא 4, ואם הרצף הוא HH תוחלת הזמן היא 6.

תרגיל כמה זמן בתוחלת לוקח לקוף, שמקליד כל אות בהתפלגות אחידה מבין 26 האפשרויות, להקליד $ABRACADABRA$?

פתרון (בלי כל הפרטים) בכל זמן n מגיע שחקן חדש ומהמר את כל הונו על האות A . אם הפסיד, הולך הביתה. אם הצליח מקבל 26 לכל יחידת השקעה וממשיך להמר באותו

אופן. אזי נגדיר X_n להיות סך ההון בידי n השחקנים הראשונים בזמן n , ונגדיר Y_n להיות סך ההון ההתחלתי שנכנס על זמן n - כלומר קבוע n . נגדיר

$$M_n = X_n - Y_n$$

וזהו מרטינגל. נגדיר T להיות הזמן שבו מופיעה המילה לראשונה. אזי

$$X_T = 26^{11} + 26^4 + 26 = C$$

ההון של מי שהצליח למצוא את כל המילה ועוד ההון של מי שהתחיל את המילה במיקום הנכון (הרצף $ABRA$ מופיע פעמיים, והכל נגמר עם A). ממשפט העצירה נקבל

$$0 = \mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_T = C - \mathbb{E}T$$

$$\mathbb{E}T = C = 26^{11} + 26^4 + 26$$

כעת נדבר על תהליך הסתעפות. נתון משתנה מקרי X המקבל ערכים שלמים אי שליליים. בדר 0 יש פריט יחיד. בכל דור כל פריט מוליד מספר צאצאים מקרי לפי ההתפלגות של X באופן בלתי תלוי. נסמן $X_j^{(i)}$ את הפריט j בדור i , ואלה כולם משתנים מקריים בלתי תלויים. נסמן Z_n את מספר הפריטים בדור n , כלומר

$$Z_{n+1} = X_1^{(n)} + \dots + X_{Z_n}^{(n)}$$

$$Z_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(n)} \mathbb{1}_{\{Z_n \geq k\}}$$

נתעניין במאורע

$$E = \{extinction\} = \{\exists n \ Z_n = 0\}$$

$$E^c = \{survival\} = \{\forall n \ Z_n > 0\}$$

משפט 1.4 נניח כי $\mathbb{P}(X = 1) < 1$ אזי

$$\mathbb{P}(E^c) > 0 \iff \mathbb{E}X > 1$$

הוכחה: נסמן $\mathbb{E}X = m$. ראשית נניח כי $m < 1$ אזי

$$\mathbb{E}(Z_{n+1} \mid Z_1, \dots, Z_n) = mZ_n$$

שכן אגף שמאל הוא גם

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(X_k^{(n)} \mathbb{1}_{\{Z_n \geq k\}} \mid Z_1, \dots, Z_n \right) = \sum_k \mathbb{1}_{\{Z_n \geq k\}} \mathbb{E}X_k^{(n)} = mZ_n$$

לכן נקבל כי

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Z_n | Z_{n-1})) = \mathbb{E}(mZ_{n-1}) = m\mathbb{E}(Z_{n-1})$$

ולכן קיבלנו $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$ ממרקוב נקבל

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) = \mathbb{P}(Z_n \geq 1) \leq \mathbb{E}(Z_n) = m^n \rightarrow 0$$

$$\mathbb{P}(E^c) = \lim_n \mathbb{P}(Z_n > 0) = 0$$

במקרה השני, $m = 1$. נשים לב כי Z_n מרטינגל אי שלילי. לכן $Z_n \rightarrow Z_\infty$ כמעט תמיד. מצד שני, $\mathbb{P}(Z_n \rightarrow c) = 0$, עבור $c > 0$, ולכן $Z_\infty = 0$ כמעט תמיד. לכן $\mathbb{P}(E^c) = 0$. יש גם מקרה שלישי - $m > 1$. לא נספיק היום, אבל בבית נראה משהו מעט חזק יותר תחת הנחת מומנט שני. ■