

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

15 במאי 2017

1 מרטינגלים

ניזכר בהגדרות הבאות, בהנתן מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

הגדרה 1.1 פילטרציה היא סדרה עולה של σ אלגבראות $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$.

הגדרה 1.2 מרטינגל הוא סדרת משתנים מקריים $X_0, X_1, \dots$ המקיימים:

1. $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ לכל n .

2. $(X_n)_n$ מותאם לפילטרציה $(\mathcal{F}_n)_n$.

3.

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$$

תרגיל יהי (X_n) מרטינגל ביחס לפילטרציה $(\mathcal{F}_n)_n$. יהיו $(\mathcal{H}_n)_n, (\mathcal{G}_n)_n$ פילטרציות כך שלכל n מתקיים

$$\sigma(X_n) \subseteq \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{H}_n$$

האם (X_n) מרטינגל ביחס לפילטרציות $(\mathcal{H}_n)_n, (\mathcal{G}_n)_n$?

פתרון כן, ולא.

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) | \mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(X_n | \mathcal{G}_n) = X_n$$

וזהו מרטינגל ביחס לפילטרציה $\mathcal{G}_n$.
ניתן דוגמה נגדית עבור $(\mathcal{H}_n)_n$. ניקח $\xi_1, \xi_2, \dots \sim U\{-1, 1\}$ בלתי תלויים. נגדיר

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{i=1}^n \xi_i \\ \mathcal{F}_n &= \sigma(X_1, \dots, X_n) \\ \mathcal{H}_n &= \mathcal{F}_{n+1} \end{aligned}$$

אכן (X_n) מרטינגל ביחס לפילטרציה $(\mathcal{F}_n)$, אבל לא ביחס לפילטרציה $(\mathcal{H}_n)$, כי

$$\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{H}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_{n+1}) = X_{n+1} \neq X_n$$

מסקנה 1.3 אם (X_n) מרטינגל ביחס לפילטרציה $(\mathcal{F}_n)_n$, אזי הוא מרטינגל גם ביחס לפילטרציה הטבעית $(\mathcal{G}_n)_n$ המוגדרת על ידי

$$\mathcal{G}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

הוכחה: מספיק להראות $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$, כלומר צספיק להראות $\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n) \subseteq \mathcal{F}_n$
אכן

$$\sigma(X_k) \subseteq \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$$

■

כאשר $0 \leq k \leq n$.

למה 1.4 נניח כי (X_n) תת מרטינגל, ונניח כי $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ קמורה עם $\mathbb{E}|\varphi(X_n)| < \infty$ לכל n .

1. אם (X_n) מרטינגל אזי $\varphi(X_n)$ תת מרטינגל.

2. אם φ עולה אזי $\varphi(X_n)$ תת מרטינגל.

הוכחה: מתקיים

$$\mathbb{E}(\varphi(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \geq \varphi(\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n))$$

כאן השתמשנו באי שוויון ינסן. מכאן נקבל את הנדרש, פעם אחת על ידי שוויון של אגף ימין לערך $\varphi(X_n)$, ופעם אחת על ידי אי שוויון (לפי מונוטוניות φ).
■

מסקנה 1.5 אם (X_n) מרטינגל, $\mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ לכל n (עבור $p \geq 1$) אזי $(|X_n|^p)$ תת מרטינגל.

מסקנה 1.6 אם (X_n) תת מרטינגל, אזי $(X_n - a)^+ = \max(X_n - a, 0)$ תת מרטינגל.

דוגמה יהיו $\xi_1, \xi_2, \dots$ משתנים מקריים בלתי לויים ושווי התפלגות עם $\mathbb{E}(\xi_n) = 0$, $\text{Var}(\xi_n) = 1$. נגדיר

$$X_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

אזי (X_n) מרטינגל, ומהמסקנה, (X_n^2) תת מרטינגל. נגדיר $M_n = X_n^2 - n$. נראה כי (M_n) מרטינגל.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}\left((X_n + \xi_{n+1})^2 - (n+1) | \mathcal{F}_n\right) = \\ &= X_n^2 + 2X_n \underbrace{\mathbb{E}(\xi_{n+1} | \mathcal{F}_n)}_{=\mathbb{E}(\xi_{n+1})=0} + \underbrace{\mathbb{E}(\xi_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n)}_{=\mathbb{E}(\xi_{n+1}^2)=\text{Var}(\xi_{n+1})=1} - n - 1 = \\ &= X_n^2 - n\end{aligned}$$

תרגיל יהיו $\xi_1, \xi_2, \dots \sim U\{-1, 1\}$ בלתי תלויים. יהיו $a, b \in \mathbb{N}$ טבעיים כלשהם. נגדיר

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n & X_n \in \{a, -b\} \\ S_{n+1} & o/w \end{cases}$$

כאשר $S_0 = X_0 = 0$. הראו כי:

1. $(X_0, X_1, \dots) = (S_0, S_1, S_2, \dots, S_T, S_T, S_T, \dots)$ כאשר

$$T = \min\{n \mid S_n \in \{a, -b\}\}$$

2. (X_n) מרטינגל ביחס לפילטרציה הטבעית $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$.

3. הראו כי

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \mathbb{P}(\exists n \ X_n \in \{a, -b\}) = 1$$

ומצאו את ההתפלגות של

$$X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = S_T$$

פתרון 1 ברור, את 2 ראינו כבר בעבר. החלק הראשון של 3, להראות כי $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$,

יהיה בתרגיל בית, ולכן לא נעשה אותו כאן. אנחנו נמצא את ההתפלגות של X_∞ . נשים לב כי $S_T \in \{a, -b\}$. נסמן $q_n = \mathbb{P}(X_n = -b)$, $p_n = \mathbb{P}(X_n = a)$, נשים לב שמתקיים $\mathbb{P}(S_T = a)$.

$$p_n \rightarrow p$$

$$q_n \rightarrow 1 - p$$

אזי

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{T \leq n}) + \mathbb{E}(X_n \mathbb{1}_{T > n}) = \\ &= [\{T \leq n\} = \{X_n \in \{a, -b\}\}] = a \cdot p_n - bq_n + c_n \mathbb{P}(T > n) \end{aligned}$$

כאשר $|c_n| \leq \max\{a, b\}$. ניזכר כי $\mathbb{P}(T > n) \rightarrow 0$, ולכן כשניקח גבול נקבל

$$0 = ap - b(1 - p)$$

$$p = \frac{b}{a + b}$$