

## הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

8 במאי 2017

**הגדרה 0.1** (תוחלת מותנה) בהינתן משתנה מקרי  $X$  על  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  בעל תוחלת, ותת סיגמא אלגברה  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ , התוחלת המותנה של  $X$  בהנתן  $\mathcal{G}$  היא המשתנה המקרי  $Y = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$  המקיים

$$1. \mathbb{E}|Y| < \infty$$

$$2. Y \text{ מדיד לפי } \mathcal{G}.$$

$$3. \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(Y \mathbb{1}_A) \text{ לכל } A \in \mathcal{G}.$$

**משפט 0.2** (משפט רדון ניקודים) יהיו  $\nu, \mu$  שתי מידות סיגמא סופיות על  $(\Omega, \mathcal{F})$ . אם לכל  $A \in \mathcal{F}$  מתקיים

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

נסמן  $\nu \ll \mu$  ונאמר כי המידה  $\nu$  רציפה בהחלט ביחס למידה  $\mu$ . במצב זה, קיימת פונקציה  $f$  מדידה כך שמתקיים

$$\nu(A) = \int_A f(x) d\mu(x)$$

לכל  $A \in \mathcal{F}$ . אומרים כי  $f$  היא הצפיפות של המידה  $\nu$  ביחס למידה  $\mu$ , ומסמנים

$$f = \frac{d\nu}{d\mu}$$

**תרגיל** יהיו  $X, Y$  משתנים מקריים בעלי תוחלת ונניח כי  $\mathbb{E}[X | Y] = Y$  כמעט תמיד,  $\mathbb{E}[Y | X] = X$  כמעט תמיד. הוכיחו כי  $X = Y$  כמעט תמיד.

**פתרון** כיוון שמתקיים  $\mathbb{E}[X - Y | X] = 0$  כמעט תמיד, לכל  $t \in \mathbb{R}$  מתקיים

$$\mathbb{E}[X - Y | X \leq t] = \mathbb{E}[(X - Y) \mathbb{1}_{X \leq t}] = \mathbb{E}(\mathbb{E}[X - Y | X] \mathbb{1}_{X \leq t}) = 0$$

מצד שני,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - Y) \mathbb{1}_{X \leq t, Y \leq t}] &= \mathbb{E}[(X - Y) \mathbb{1}_{X \leq t}] - \mathbb{E}[(X - Y) \mathbb{1}_{X \leq t, Y > t}] = \\ &= -\mathbb{E}[(X - Y) \mathbb{1}_{X \leq t, Y > t}] \end{aligned}$$

באופן סימטרי

$$\mathbb{E}[(X - Y) \mathbb{1}_{X \leq t, Y \leq t}] = -\mathbb{E}[(X - Y) \mathbb{1}_{Y \leq t, X > t}]$$

לכן

$$\underbrace{\mathbb{E}[(X - Y) \mathbb{1}_{Y \leq t, X > t}]}_{\geq 0} = \underbrace{\mathbb{E}[(X - Y) \mathbb{1}_{X \leq t, Y > t}]}_{\leq 0}$$

לכן נובע כי

$$\mathbb{E}[(X - Y) \mathbb{1}_{X \leq t, Y > t}] = 0$$

קיבלנו משתנה מקרי אי חיובי שתוחלתו אפס - משמע הוא אפס כמעט תמיד. כלומר,

$$\mathbb{P}(X \leq t < Y) = 0$$

אבל כעת

$$\{X < Y\} = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} \{X \leq t < Y\}$$

ולכן  $\mathbb{P}(X < Y) = 0$ . מסימטריה,  $\mathbb{P}(Y > X) = 0$ , וסיימנו.

**הערה 0.3** (התניה במאורע עם הסתברות אפס) נניח כי  $Y$  משתנה מקרי בעל תוחלת. נניח  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  תת סיגמא אלגברה. נניח כי  $A_n \searrow A$  כך שמתקיים  $\mathbb{P}(A > 0)$ , כאשר  $A_n \in \mathcal{G}$ . אזי

$$\frac{\mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{A_n}]}{\mathbb{P}(A_n)} = \mathbb{E}[Y | A_n] \rightarrow \mathbb{E}[Y | A] = \frac{\mathbb{E}[Y \mathbb{1}_A]}{\mathbb{P}(A)}$$

כי מתקיים  $\mathbb{P}(A_n) \rightarrow \mathbb{P}(A)$  (שכן  $A_n \searrow A$ ) וכן  $\mathbb{E}[Y \mathbb{1}_{A_n}] \rightarrow \mathbb{E}[Y \mathbb{1}_A]$  כי  $|Y \mathbb{1}_{A_n}| \leq |Y|$  בעלת תוחלת ולכן ניתן להפעיל את משפט ההתכנסות הנשלטת. כעת, כאשר  $\mathbb{P}(A) = 0$  ננסה להגדיר

$$\mathbb{E}[Y | A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y | A_n]$$

**דוגמא** לבעייתיות: יהיו  $X \sim U([0, 1])$ ,  $Y \sim U([1, 2])$  בלתי תלויים. ראשית, נגדיר

$$\begin{aligned} A &= \{X = 0\} \\ A_n &= \left\{X \leq \frac{1}{n}\right\} \\ \mathcal{G} &= \sigma(X) \end{aligned}$$

אזי מתקיים

$$\mathbb{E}[Y \mid X = 0] = \mathbb{E}[Y \mid A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y \mid A_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[Y \mid X \leq \frac{1}{n}\right] = \mathbb{E}[Y] = \frac{3}{2}$$

שנית, נגדיר

$$\begin{aligned} A &= A' = \left\{ \frac{X}{Y} = 0 \right\} \\ A'_n &= \left\{ \frac{X}{Y} \leq \frac{1}{n} \right\} \\ \mathcal{G} &= \sigma\left(\frac{X}{Y}\right) \end{aligned}$$

אזי מתקיים

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Y \mid \frac{X}{Y} = 0\right] &= \mathbb{E}[Y \mid A'] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[Y \mid A'_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[Y \mid X \leq \frac{Y}{n}\right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}\left[Y \mathbb{1}_{X \leq \frac{Y}{n}}\right]}{\mathbb{P}\left(X \leq \frac{Y}{n}\right)} \end{aligned}$$

נתחיל בלחשב את  $\mathbb{P}\left(X \leq \frac{Y}{n}\right)$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X \leq \frac{Y}{n}\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X \leq \frac{Y}{n}}\right] = \int_0^1 \left( \int_1^2 \mathbb{1}_{x \leq \frac{y}{n}} dy \right) dx = \\ &= \int_1^2 \left( \int_0^1 \mathbb{1}_{x \leq \frac{y}{n}} dx \right) dy = \int_1^2 \frac{y}{n} dy = \frac{3}{2n} \end{aligned}$$

כעת:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Y \mathbb{1}_{X \leq \frac{Y}{n}}\right] &= \int_1^2 \left( \int_0^1 y \mathbb{1}_{x \leq \frac{y}{n}} dx \right) dy = \\ &= \int_1^2 \frac{y^2}{n} dy = \frac{y^3}{3n} \Big|_1^2 = \frac{7}{3n} \end{aligned}$$

לכן

$$\mathbb{E}\left[Y \mid \frac{X}{Y} = 0\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}\left[Y \mathbb{1}_{X \leq \frac{Y}{n}}\right]}{\mathbb{P}\left(X \leq \frac{Y}{n}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 \cdot 2n}{3n \cdot 3} = \frac{14}{9}$$

אבל למעשה התננו באותו מאורע!