

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

26 באפריל 2017

1 סוגי התכנסות

תזכורת נניח כי $X, X_1, X_2, \dots$ משתנים מקריים.

- נאמר כי $X_n \rightarrow X$ כמעט תמיד אם $\mathbb{P}(X_n \rightarrow X) = 1$.
- נאמר כי $X_n \rightarrow X$ בהתכנסות אם $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \rightarrow 0$ לכל $\varepsilon > 0$.

טענה 1.1 אם $X_n \rightarrow X$ כמעט תמיד אזי $X_n \rightarrow X$ בהסתברות.

הוכחה:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|X_n - X| > \varepsilon\}\right) = 0$$

■

דוגמא נבצע אינסוף הטלות מטבע בלתי תלויות. ההטלה שמספרה n מצליחה בהסתברות p_n . נסמן בתור A_n את המאורע בו ההטלה שמספרה n הצליחה. אזי:

- $\mathbb{1}_{A_n} \rightarrow 0$ כמעט תמיד אם ורק אם $\sum p_n < \infty$.
- $\mathbb{1}_{A_n} \rightarrow 0$ בהסתברות אם ורק אם $p_n \rightarrow 0$.

משפט 1.2 (אי שוויון צ'בישב) נניח כי X משתנה מקרי עם שונות סופית. אזי

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq t) \leq \frac{\text{Var}X}{t^2}$$

הוכחה:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq t) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X|^2 \geq t^2) \leq \frac{\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}X|^2)}{t^2} = \frac{\text{Var}X}{t^2}$$

■

המעבר הלפני אחרון הוא לפי אי שוויון מרקוב.

משפט 1.3 (החוק החלש של המספרים הגדולים) יהיו $X_1, X_2, \dots$ משתנים מקריים בלתי תלויים שויי התפלגות עם תוחלת μ ושונות סופית. נסמן

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

אזי $\frac{S_n}{n} \rightarrow \mu$ בהסתברות.

הוכחה: נשים לב שמתקיים

$$\text{Var}(S_n) = \text{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = n \text{Var}(X_1)$$

אזי

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}(|S_n - \mu n| > \varepsilon n) = \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}S_n| > \varepsilon n) \leq \frac{\text{Var}S_n}{\varepsilon^2 n^2} \rightarrow 0$$

■

הערה 1.4 התנאי על סופיות השונות מיותר - נראה בעתיד.

משפט 1.5 (החוק החזק של המספרים הגדולים) יהיו $X_1, X_2, \dots$ משתנים מקריים בלתי תלויים עם $\mathbb{E}X_n = 0$ לכל n , וכן

$$\sup_n \mathbb{E}(X_n^4) < \infty$$

נסמן

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

אזי $\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$ כמעט תמיד.

■

הוכחה: נראה בהרצאה.

הערה 1.6 לא צריך להניח את התנאי על המומנט הרביעי, אבל בתמורה כן צריך להניח שהמשתנים שויי התפלגות למשל.

תרגיל יהיו $X_1, X_2, \dots$ משתנים מקריים בלתי תלויים וחיוביים, עם תוחלת $\mathbb{E}X_n = \mu$ לכל n וכן

$$\sup_n \mathbb{E}(X_n^4) < \infty$$

נגדיר

$$T_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

וכן

$$N_t = \sup \{n \mid T_n \leq t\}$$

אזי $\frac{N_t}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}$ כמעט תמיד.

הוכחה: מהחוק החזק נובע כי $\frac{T_n}{n} \rightarrow \mu$ כמעט בכל מקום. מההגדרה של N_t נובע כי

$$T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1}$$

נחלק הכל בגורם N_t ונקבל

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} < \frac{T_{N_t+1}}{N_t+1} \frac{N_t+1}{N_t}$$

כעת, לכל n , מתקיים $T_n < \infty$ כמעט תמיד. לכן, $N_t \rightarrow \infty$ כמעט תמיד. לכן, כמעט תמיד,

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \rightarrow \mu, \frac{N_t+1}{N_t} \rightarrow 1$$

ולכן

$$\frac{t}{N_t} \rightarrow \mu$$

■

תרגיל יהיו $X_1, X_2, \dots \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$ בלתי תלויים. נסמן

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

חשבו את

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\arctan \left(\frac{2S_n}{n} - X_1 \right) \right)$$

פתרון מתקיים $\mathbb{E}(X_n^4) \leq 1$, ולכן מהחוק החזק נובע כי $\frac{S_n}{n} \rightarrow \frac{1}{2}$ כמעט תמיד. לכן,

$$\frac{2S_n}{n} - X_1 \rightarrow 1 - X_1$$

כמעט תמיד. $\arctan$ רציפה, ולכן, נוכל להגדיר

$$Z_n = \arctan\left(\frac{2S_n}{n} - X_1\right)$$

$$Z = \arctan(1 - X_1)$$

ואז $Z_n \rightarrow Z$ כמעט תמיד. $\arctan$ חסומה, בפרט Z_n חסומות באופן אחיד, ולכן ממשפט ההתכנסות החסומה נקבל $\mathbb{E}Z_n \rightarrow \mathbb{E}Z$. נחשב:

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}(\arctan(1 - X_1)) = \frac{1}{2} \arctan(1) + \frac{1}{2} \arctan(0) = \frac{\pi}{8}$$