

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

3 באפריל 2017

משפט 0.1 (למת בורל קנטלי השנייה) יהיו $\{A_n\}$ סדרה של מאורעות בלתי תלויים, המקיימים

$$\sum \mathbb{P}(A_n) = \infty$$

אזי

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$$

תרגיל יהיו $X_1, X_2, \dots$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות. נתון

$$\mathbb{E}[|X_1|] = \infty$$

נסמן

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

הוכיחו כי

$$\mathbb{P}(\limsup |X_n| \geq n) = 1$$

בפרט הוכיחו כי

$$\mathbb{P}\left(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} < \infty\right) = 0$$

פתרון

$$\mathbb{E}[|X_1|] = \int_0^\infty \mathbb{P}(|X_1| \geq t) dt \leq \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(|X_1| \geq n) = 1 + \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(|X_n| \geq n)$$

כעת, מהלמה של בורל קנטלי, נקבל כי

$$\mathbb{P}(\limsup |X_n| \geq n) = 1$$

כעת, נשים לב כי

$$\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{S_n}{n(n+1)} - \frac{X_{n+1}}{n+1}$$

אם $\frac{S_n}{n} \rightarrow 0$, אזי $\frac{X_{n+1}}{n+1} \rightarrow 0$. כעת,

$$\mathbb{P}\left(\exists \lim \frac{S_n}{n} < \infty\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \rightarrow 0\right)$$

אבל $|X_n| \geq n$ עבור אינסוף ערכי n כמעט בכל מקום, ולכן

$$\limsup \frac{|X_n|}{n} = 1$$

כמעט בכל מקום. לכן נקבל כי

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_n}{n} \rightarrow 0\right) = 0$$

משפט 0.2 (חוק 0-1 של קולמוגורוב) תהי $X_1, \dots, X_n$ סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות נסתכל על $\sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$. אזי $\tau = \bigcap \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ טריוויאלית, כלומר לכל $E \in \tau$ מתקיים $\mathbb{P}(E) \in \{0, 1\}$.

תרגיל יהיו $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \dots$ משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות. נגדיר

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$T_n = \sum_{i=1}^n Y_i$$

האם ייתכן

$$\mathbb{P}(S_n - T_n \rightarrow \infty) > 0$$

פתרון לא! נגדיר $Z_n = X_n - Y_n$. הם משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות, וכן סימטריים, כלומר $Z_n, -Z_n$ בעלי אותה התפלגות יהי E המאורע בו $S_n - T_n \rightarrow \infty$. למעשה,

$$E = \left\{ \sum_{i=1}^n Z_i \rightarrow \infty \right\}$$

E הוא מאורע זנבי, כלומר $E \in \tau$, ולכן $\mathbb{P}(E) \in \{0, 1\}$. נשים לב כי

$$E' = \left\{ \sum_{i=1}^n Z_i \rightarrow -\infty \right\}$$

ולכן גם $E' \in \tau$, כלומר $\mathbb{P}(E') \in \{0, 1\}$. כעת, E, E' זרים, וכן סימטריים, כלומר $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E')$ וכעת

$$\begin{aligned} 1 &\geq \mathbb{P}(E \cup E') = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(E') = 2\mathbb{P}(E) \\ \mathbb{P}(E) &\leq \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(E) &= 0 \end{aligned}$$

משפט 0.3 (הלמה של פאטו) אם $f_n \geq 0$ סדרת פונקציות מדידות במרחב הסתברות, נגדיר $f(x) = \liminf f_n(x)$, ואז f מדידה וכן

$$\int f \leq \liminf \int f_n$$

משפט 0.4 (הלמה של שפה) יהיו $X_1, X_2, \dots$ משתנים מקריים בעלי תוחלת סופית. אם $X_n \rightarrow X$ כמעט תמיד, וכן

$$\mathbb{E}(|X_n|) \rightarrow \mathbb{E}(|X|)$$

אזי מתקיים

$$\mathbb{E}(|X_n - X|) \rightarrow 0$$

ננסח מחדש את הלמה: יהי (S, Σ, μ) מרחב מידה סופי וממשי. יהיו $f_n, f \in L^1(\mu)$ כך שמתקיים $f_n \rightarrow f$ כמעט בכל מקום. אזי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| \, d\mu = \int |f| \, d\mu$$

הוכחה: נוכיח את הניסוח השני. ראשית, בכיוון $\Rightarrow$:

$$\left| \int |f_n| \, d\mu - \int |f| \, d\mu \right| \leq \int ||f_n| - |f|| \, d\mu \leq \int |f_n - f| \, d\mu$$

בכיוון $\Leftarrow$:

$$\begin{aligned} |f_n - f| &\leq |f_n| + |f| \\ |f_n| + |f| - |f_n - f| &\geq 0 \end{aligned}$$

כעת, מהלמה של פאטו:

$$\begin{aligned} 2 \int |f| \, d\mu &= \int \liminf (|f_n| + |f| - |f_n - f|) \, d\mu \leq \liminf \int |f_n| + |f| - |f_n - f| \, d\mu = \\ &= \liminf \left(\int |f_n| \, d\mu + \int |f| \, d\mu - \int |f_n - f| \, d\mu \right) = 2 \int |f| \, d\mu - \limsup \int |f_n - f| \, d\mu \end{aligned}$$

בסך הכל

$$\limsup \int |f_n - f| \, d\mu \leq 0$$

אבל זו סדרה אי שלילית, ולכן

$$\lim \int |f_n - f| \, d\mu = 0$$

■