

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

27 במרץ 2017

תזכורת אם $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$ סיגמא אלגבראות, הם ייקראו בלתי תלויות אם

$$\mathbb{P}(F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(F_{i_j})$$

כאשר $F_{i_j} \in \mathcal{F}_{i_j}$.

קל להכליל עבור מאורעות - ניקח $\mathcal{F}_i = \{\Omega, \emptyset, A_i, A_i^c\}$.

למה 0.1 (למת מערכות הפאי) נניח כי $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}$ סיגמא אלגבראות, $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ מערכות פאי שיוצרות אותן. אזי $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ בלתי תלויות אם ורק אם $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$ בלתי תלויות.

תרגיל יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות, והיו $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3$. נניח כי $\Omega \in \mathcal{I}_i$ לכל $1 \leq i \leq 3$. הראו שאם לכל $\mathcal{I}_i$ מתקיים

$$\mathbb{P}(I_1 \cap I_2 \cap I_3) = \mathbb{P}(I_1) \mathbb{P}(I_2) \mathbb{P}(I_3)$$

אזי $\sigma(\mathcal{I}_1), \sigma(\mathcal{I}_2), \sigma(\mathcal{I}_3)$ בלתי תלויות.

פתרון נראה תחילה כי $\sigma(\mathcal{I}_2), \sigma(\mathcal{I}_3)$ בלתי תלויות. $\Omega \in \mathcal{I}_1$, ולכן $\mathbb{P}(I_2 \cap I_3) = \mathbb{P}(I_2) \mathbb{P}(I_3)$ (לכל אורך התרגיל, $\mathcal{I}_i \ni I_i$). לכן, מהלמה, נובע כי $\sigma(\mathcal{I}_3), \sigma(\mathcal{I}_2)$ בלתי תלויות. כעת, נגדיר

$$\mathcal{I}_4 = \{I_2 \cap I_3 \mid I_2 \in \mathcal{I}_2, I_3 \in \mathcal{I}_3\}$$

נשים לב כי $\sigma(\mathcal{I}_4) = \sigma(\mathcal{I}_2, \mathcal{I}_3)$. כמו כן, $\mathcal{I}_4$ מערכת פאי שכן:

$$I_4 \cap I'_4 = (I_2 \cap I_3) \cap (I'_2 \cap I'_3) = (I_2 \cap I'_2) \cap (I_3 \cap I'_3) = I''_2 \cap I''_3$$

כעת,

$$\mathbb{P}(I_1 \cap I_4) = \mathbb{P}(I_1 \cap I_2 \cap I_3) = \mathbb{P}(I_1) \mathbb{P}(I_2) \mathbb{P}(I_3) = \mathbb{P}(I_1) \mathbb{P}(I_2 \cap I_3) = \mathbb{P}(I_1) \mathbb{P}(I_4)$$

לכן $\sigma(\mathcal{I}_1), \sigma(\mathcal{I}_4)$ בלתי תלויים. כעת, יהיו $A_i \in \sigma(\mathcal{I}_i)$. אזי

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2) \mathbb{P}(A_3)$$

וסיימנו.

טענה 0.2 (הכללה פשוטה של בורל קנטלי 1) יהיו $A_1, A_2, \dots$ מאורעות המקיימים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n^c \cap A_{n+1}) < \infty, \liminf \mathbb{P}(A_n) = 0$$

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0 \text{ אזי}$$

הוכחה: נגדיר $E_n = A_n^c \cap A_{n+1}$. מבורל קנטלי, נקבל $\mathbb{P}(\limsup E_n) = 0$. לכן $\mathbb{P}(G_0 \cap G_1) = 1$, כאשר $G_0 = \liminf A_n, G_1 = \liminf A_n^c = (\limsup A_n)^c$. אבל,

$$\mathbb{P}(G_0) = \mathbb{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbb{P}(A_n) = 0$$

■

השתמשנו בלמה של פאטו. לכן $\mathbb{P}(G_1) = 1$, וסיימנו.

משפט 0.3 (למת בורל קנטלי השנייה) אם $A_1, A_2, \dots$ מאורעות בלתי תלויים, אזי

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$$

אזי

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1$$

הוכחה תינתן בהרצאה. נראה שהדרישה לאי תלות הכרחית: יהי $X \sim \text{Ber}(\frac{1}{2})$, ונגדיר

$$A_i = \{x = 1\}$$

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = \frac{1}{2} \text{ אזי בעוד הטור הוא וודאי } \infty.$$

תרגיל מבצעים סדרה אינסופית של הטלות מטבע שמתפלגות $\text{Ber}(p)$ באופן בלתי תלוי. יהי A_n המאורע בו יש רצף של n הצלחות עד ההטלה 2^n (כולל). הראו כי

$$\mathbb{P}(\limsup (A_n)) = \begin{cases} 1 & p \geq \frac{1}{2} \\ 0 & p < \frac{1}{2} \end{cases}$$

פתרון נתחיל במקרה הקל - נניח כי $p < \frac{1}{2}$. נשים לב כי

$$\mathbb{P}(A_n) \leq 2^n p^n \Rightarrow \sum_k \mathbb{P}(A_k) < \infty$$

לכן מבורל קנטלי 1, נקבל $\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0$. כעת נניח כי $p \geq \frac{1}{2}$. נגדיר $B_n \subseteq A_n$ להיות המאורע שבו יש רצף של n הצלחות בהטלות שבין 1 ו- 2^{n-1} ובין 2^n . אז כעת, B_n תלויים בהטלות שונות, ולכן בלתי תלויים. כמו כן,

$$\mathbb{P}(B_n) \geq 1 - (1 - p^n)^{\left\lceil \frac{2^{n-1}}{n} \right\rceil} \geq \dots \geq \frac{1}{2n} - o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

לכן סכום ההסתברויות הוא אינסוף. מבורל קנטלי 2, נקבל כי B_n קורה אינסוף פעמים בהסתברות 1, ובפרט זה נכון גם עבור A_n .