

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

20 במרץ 2017

1 משפטים לגבי מידות

משפט 1.1 (משפט היחידות) יהיו μ, ν שתי מידות על (S, Σ) , ותהי מערכת פאי כך שמתקיים $\sigma(\mathcal{I}) = \Sigma$ אם $\mu(S) = \nu(S) < \infty$ וכן $\mu|_{\mathcal{I}} = \nu|_{\mathcal{I}}$, אזי $\mu = \nu$.

דוגמא נראה שהדרישה למערכת פאי היא הכרחית. ניקח $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $\Sigma = P(S)$, $\mathcal{I} = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}\}$, 2^S מכאן $\sigma(\mathcal{I}) = \Sigma$. המידה מתוארת על ידי

$$\begin{aligned}\mu(1) &= \frac{1}{2}, \mu(2) = 0, \mu(3) = \frac{1}{2}, \mu(4) = 0 \\ \nu(1) &= 0, \nu(2) = \frac{1}{2}, \nu(3) = 0, \nu(4) = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

משפט 1.2 (משפט הקיום) יהי (S, Σ) מרחב מדיד ותהי $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ תת אלגברה עם $\sigma(\Sigma_0) = \Sigma$. תהי $\mu_0 : \Sigma_0 \rightarrow [0, \infty]$ העתקה סיגמא אדיטיבית. אזי קיימת מידה μ על (S, Σ) המקיימת $\mu|_{\Sigma_0} = \mu_0$. אם $\mu_0(S) < \infty$ אזי המידה μ היא יחידה.

דוגמא נראה שהדרישה להעתקה סיגמא אדיטיבית היא הכרחית. ניקח בתור Σ_0 את האלגברה של כל האיחודים הסופיים של קטעים $(a, b]$, כאשר $a, b \in [-\infty, \infty]$ (בתוך $\mathbb{R}$). ניקח

$$\mu_0(A) = \begin{cases} 1 & \exists \varepsilon > 0 \quad (0, \varepsilon) \subseteq A \\ 0 & \text{o/w} \end{cases}$$

זו העתקה אדיטיבית. לא יכולה להיות הרחבה למידה, שכן

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu\left(\bigcap_{\varepsilon \rightarrow 0} (0, \varepsilon)\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu((0, \varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 1 = 1$$

בסתירה.

2 משתנים מקריים ממשיים

הגדרה 2.1 משתנה מקרי ממשי על מרחב מדיד $(\Omega, \mathcal{F})$ הוא העתקה מדידה $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

הערה 2.2 כאשר $h : S \rightarrow \mathbb{R}$, מרחב טופולוגי, אזי נאמר כי h העתקת בורל אם h מדידה ביחס למרחב $(S, \mathcal{B}(S))$.

2.1 התפלגות ופונקציית ההתפלגות (המצטברת)

הגדרה 2.3 יהי $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ משתנה מקרי ממשי על מרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. ההתפלגות של X :

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$$

זו מידת הסתברות על $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$

2.4 פונקציית ההתפלגות של X היא

$$F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}_X((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

הערה 2.5 האוסף $\pi(\mathbb{R})$ של הקרניים $(-\infty, x]$ היא מערכת פאי שיוצרת את סיגמא אלגברת בורל. ממשפט היחידות, שני משתנים מקריים עם אותה פונקציית ההתפלגות הם שווי ההתפלגות.

תכונות של הפונקציה F_X :

1. F_X מונוטונית עולה.

2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

3. F רציפה מימין, כלומר

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} F_X(x + \varepsilon) = F_X(x)$$

קיום של מידה עם פונקציית התפלגות נתונה: אם F היא פונקציית ההתפלגות אזי קיימת מידת הסתברות $\mathbb{P}$ על $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ כך שמתקיים

$$F(x) = \mathbb{P}((-\infty, x])$$

3 מימוש של משתנים מקריים על מרחבי הסתברות שונים

יהי $X \sim \text{Ber}(\frac{2}{5})$ משתנה מקרי, כלומר

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{3}{5}, \mathbb{P}(X=1) = \frac{2}{5}$$

1. ניקח $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = 2^{\{0,1\}}$.

$$\mathbb{P}(\{0\}) = \frac{3}{5}$$

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{2}{5}$$

$$X(\omega) = \omega$$

2. $\Omega = \{1, 2, \dots, 5\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, כאשר

$$\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{5}$$

ונגדיר

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & x \in \{1, 4\} \\ 0 & x \in \{2, 3, 5\} \end{cases}$$

3. ניקח $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$. $\mathbb{P}$ היא מידת לבג. ניקח $X(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)$ כאשר $A \subseteq [0, 1]$ מדידה בורל עם מידה $\frac{2}{5}$. כאשר I קטע, מתקיים

$$\mathbb{P}_X(I) = \begin{cases} 1 & \{0, 1\} \in I \\ \frac{3}{5} & 0 \in I, 1 \notin I \\ \frac{2}{5} & 0 \notin I, 1 \in I \\ 0 & 0 \notin I, 1 \notin I \end{cases}$$