

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

26 ביוני 2017

1 משפט הגבול המרכזי

תרגיל חשבו את

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \text{Vol} \left(\left\{ x \in [-1, 1]^n \mid \sum x_i^{\frac{1}{3}} > \sqrt{n} \right\} \right)$$

פתרון נגדיר $X_1, X_2, \dots \sim U[-1, 1]$ בלתי תלויים. במצב זה הגבול שלנו הוא

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sum X_i^{\frac{1}{3}} > \sqrt{n} \right)$$

אז נגדיר $Y_i = X_i^{\frac{1}{3}}$, ואז $\mathbb{E}Y_i = 0$ וכן

$$\text{Var}Y_i = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{5}$$

ואז הגבול הוא

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum Y_i > \sqrt{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum Y_i}{\sqrt{\sum \text{Var}(Y_i)}} > \frac{1}{\sqrt{\text{Var}Y_1}} \right) = \mathbb{P} \left(\mathcal{N}(0, 1) > \sqrt{\frac{5}{3}} \right)$$

תרגיל חשבו את

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \cos \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \right) dx_1 \dots dx_n$$

פתרון נגדיר

$$X_i \sim U[0, 1]$$

ונקבל

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\cos \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \right) \right)$$

נרצה להוריד את התוחלת בשביל משפט הגבול המרכזי, ולכן נגדיר

$$Y_n = \frac{(X_1 - \frac{1}{2}) + \dots + (X_n - \frac{1}{2})}{\sqrt{n}} = \frac{X_1 + \dots + X_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}}$$

וידוע לנו מהגבול המרכזי שמתקיים $Y_n \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ כאשר $\sigma^2 = \text{Var}(X_1 - \frac{1}{2})$.
 $\text{Var}(X_1) = \frac{1}{12}$ אם כן, הגבול שלנו הוא

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\cos \left(Y_n + \frac{\sqrt{n}}{2} \right) \right) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\cos \left(\frac{\sqrt{n}}{2} \right) \cos Y_n - \sin \left(\frac{\sqrt{n}}{2} \right) \sin Y_n \right)$$

Y_n סימטרי ולכן $\mathbb{E}(\sin Y_n) = 0$ נקבל

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\cos \frac{\sqrt{n}}{2} \right) \mathbb{E}(\cos Y_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\cos Y_n) = \\ &= \mathbb{E}(\cos(\mathcal{N}(0, 1))) = \dots = e^{-\frac{\sigma^2}{2}} = e^{-\frac{1}{24}} \end{aligned}$$

תרגיל יהיו X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות וסימטריים, במובן שההתפלגות של $X, -X$ זהות, וגם של $Y, -Y$. נניח כי $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}(X^2) = 1$. הראו שאם $(X+Y), (X-Y)$ בלתי תלויים, אזי X מתפלג $\mathcal{N}(0, 1)$.

פתרון נסמן φ את הפונקציה האופיינית של X . ראשית, נראה כי

$$\varphi(2t) = \varphi(t)^4$$

לכל t . נחשב:

$$\begin{aligned} \varphi(2t) &= \mathbb{E}(e^{2itX}) = \mathbb{E}(e^{it(X+Y+X-Y)}) = \\ &= \mathbb{E}(e^{it(X+Y)}) \mathbb{E}(e^{it(X-Y)}) = \\ &= \mathbb{E}(e^{itX}) \mathbb{E}(e^{itY}) \mathbb{E}(e^{itX}) \mathbb{E}(e^{-itY}) = \\ &= \varphi(t)^3 \varphi(-t) \end{aligned}$$

מסימטריה של X , נקבל

$$\varphi(-t) = \mathbb{E}(e^{-itX}) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \varphi(t)$$

ובסך הכל אכן קיבלנו

$$\varphi(2t) = \varphi(t)^4$$

מכאן נקבל כמובן כי

$$\varphi(t) = \varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)^{4^n}$$

מכאן יש שתי דרכים להמשיך. נוכיח

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

ונסיק את הנדרש. נגדיר

$$S_N = \frac{X_1 + \dots + X_N}{\sqrt{N}}$$

כאשר X_i מתפלגים כמו X . נקבל

$$\varphi_{S_N}(t) = \mathbb{E}(e^{itS_N}) = \mathbb{E}\left(e^{it\frac{X_1}{\sqrt{N}}}\right)^N = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{N}}\right)^N$$

נציב $N = 4^n$ ונקבל

$$\varphi_{S_N}(t) = \varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)^{4^n} = \varphi(t)$$

לכן S_N מתפלג כמו X , לכל $N = 4^n$. ידוע לנו כי $\mathcal{N}(0, 1) \xrightarrow{d} S_N$, ובפרט $\varphi_{S_N}(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$. זה קורה בפרט לאורך תת הסדרה $N = 4^n$, ולכן

$$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

וסיימנו. הדרך השנייה להוכיח את זה היא לחקות את ההוכחה של משפט הגבול המרכזי:

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

וממשיכים משם.

תרגיל יהיו $X_1, X_2, \dots$ בלתי תלויים ושווי התפלגות עם $\mathbb{E}X_1 = 0$, $0 < \text{Var}X_1 < \infty$. נסמן $S_n = X_1 + \dots + X_n$. הראו כי

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty$$

כמעט תמיד.

פתרון מחוק $0 - 1$ של קולמוגורוב, ההסתברות שהגבול הזה הוא יותר מאשר C היא 0 או 1, לכל C . לכן,

$$\mathbb{P}\left(\limsup \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq C\right) \geq \mathbb{P}\left(\limsup \left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}} > C\right\}\right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > c\right)$$

המעבר הראשון הוא כי המאורעות מוכלים, והשני מפאטו. כעת, ממשפט הגבול המרכזי, $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$. לכן ההסתברות שהתחלנו איתה היא לפחות

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\mathcal{N}(0, \sigma^2) > c) > 0$$

ולכן לכל C הסיכוי לעבור אותו הוא 1. לכן שואפים לאינסוף כמעט תמיד.