

## הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

19 ביוני 2017

### 1 פירוק/הצגת ריס (Reisz)

משפט 1.1 יהי  $(X_n)$  תת מרינגל, ונניח כי

$$\sup_n \mathbb{E}(X_n^+) < \infty$$

אזי ניתן לכתוב  $X_n = Y_n - Z_n$  באשר  $Y_n$  מרטינגל,  $Z_n$  על מרטינגל אי שלילי המתכנס לאפס כמעט תמיד ובנורמת  $L^1$ .

הוכחה: נראה תחילה כי  $(X_n)$  חסום בנורמת  $L^1$ .

$$\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}X_n^+ + \mathbb{E}X_n^- \leq 2\mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_0$$

וזאת משום שמתקיים

$$\mathbb{E}X_0 \leq \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_n^+ - \mathbb{E}X_n^-$$

נשים לב כעת כי

$$X_n \leq \mathbb{E}(X_{n+m} | \mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+m+1} | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+m+1} | \mathcal{F}_n)$$

לכן הסדרה  $(\mathbb{E}(X_{n+m} | \mathcal{F}_n))_m$  עולה, וחסומה מלמטה על ידי משתנה מקרי אינטגרלי - לכן

$$Y_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_m | \mathcal{F}_n)$$

מתכנס כמעט תמיד ובנורמת  $L^1$  (כאשר  $m \rightarrow \infty$ ). נשים לב שכעת

$$Y_n = \lim_m \mathbb{E}(X_{n+m+1} | \mathcal{F}_n) = \lim_m \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+m+1} | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n)$$

המעבר האחרון יוסבר בתרגיל הבית. כלומר,  $Y_n$  מרטינגל. נגדיר כעת  $Z_n = Y_n - X_n$ . ברור שזהו סופר מרטינגל, ושהוא אי שלילי ממה שראינו קודם. כעת,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z_n &= \mathbb{E}Y_n - \mathbb{E}X_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_m | \mathcal{F}_n)) - \mathbb{E}X_n = \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}X_m - \mathbb{E}X_n\end{aligned}$$

לכן נקבל  $\mathbb{E}Z_n \rightarrow 0$ . זהו סופר מרטינגל אי שלילי, ולכן  $Z_n \rightarrow Z_\infty$  כמעט תמיד. מפאטו, נובע שמתקיים

$$0 \leq \mathbb{E}Z_\infty \leq \lim_n \mathbb{E}Z_n = 0$$

■

ולכן  $Z_\infty = 0$  כמעט תמיד.

## 2 פונקציות אופייניות

אם  $X$  משתנה מקרי ממשי, אזי

$$\varphi_X(\theta) = \mathbb{E}(e^{i\theta X})$$

**דוגמה** אם  $U \sim U[-1, 1]$ , אזי  $\varphi_U(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$ . הסבר:

$$\varphi_U(\theta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{i\theta x} dx = \frac{1}{2} \frac{e^{i\theta x}}{i\theta} \Big|_{-1}^1 = \frac{\sin \theta}{\theta}$$

**תרגיל** יהיו  $X, Y$  משתנים מקריים בלתי תלויים שוי התפלגות. הראו שלא ייתכן שהמשתנה  $X - Y$  מתפלג אחיד בקטע  $[-1, 1]$ .

**פתרון** נניח שכן

$$\begin{aligned}\frac{\sin \theta}{\theta} &= \sin_{X-Y}(\theta) = \varphi_X(\theta) \varphi_{-Y}(\theta) = \varphi_X(\theta) \varphi_Y(-\theta) = \varphi_X(\theta) \varphi_X(-\theta) = \\ &= \varphi_X(\theta) \overline{\varphi_X(\theta)} = |\varphi_X(\theta)|^2\end{aligned}$$

אגף ימין אי שלילי ואגף שמאל לא, וזו סתירה כמובן.

**תרגיל** יהיו  $X_1, X_2, \dots$  משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות. נניח כי  $X_n \rightarrow X$  בהסתברות. הראו כי  $X$  קבוע כמעט תמיד.

**פתרון** נניח בשלילה כי  $X$  אינו קבוע. אזי קיימים  $s < t$ ,  $\varepsilon > 0$  המקיימים

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq s) &\geq \varepsilon \\ \mathbb{P}(X \geq t) &\geq \varepsilon\end{aligned}$$

נגדיר כעת

$$\delta = \frac{t-s}{3}$$

ואז

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n \leq s + \delta) &\geq \mathbb{P}(X \leq s) - \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \delta) \\ \liminf_n \mathbb{P}(X_n \leq s + \delta) &\geq \mathbb{P}(X \leq s) \geq \varepsilon\end{aligned}$$

ולכן  $\mathbb{P}(X_n \leq s + \delta) \geq \frac{\varepsilon}{2}$  עבור  $n$  גדול מספיק, וכך גם  $\mathbb{P}(X_n \geq t + \delta) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ . כעת

$$\mathbb{P}(|X_n - X_m| > 2\varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) + \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$$

שני אלה הולכים לאפס, ולכן

$$\mathbb{P}(|X_n - X_m| \geq \delta) \rightarrow 0$$

אבל הסיכון הזה הוא לפחות  $\varepsilon^2$ ,  $\mathbb{P}(X_n \leq s + \delta, x_m \geq t - \delta) \geq \varepsilon^2$ , בסתירה.