

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

12 ביוני 2017

משפט 0.1 (אי שוויון תת המרטינגלים של Doob) יהי (Z_n) תת מרטינגל אי שלילי. אזי לכל $\lambda > 0$ מתקיים

$$\lambda \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq k \leq n} Z_k \geq \lambda \right) \leq \mathbb{E} \left(Z_n \mathbb{1}_{\left\{ \sup_{0 \leq k \leq n} Z_k \geq \lambda \right\}} \right) \leq \mathbb{E} (Z_n)$$

נשים לב שאי שוויון זה הוא למעשה הכללה של אי שוויון מרקוב.

הוכחה: נגדיר

$$F = \left\{ \sup_{0 \leq k \leq n} Z_k \geq \lambda \right\}$$
$$F_i = \{Z_0, \dots, Z_{i-1} < \lambda, Z_i \geq \lambda\}$$

ואז יש איחוד זר

$$F = \bigcup_{i=0}^n F_i$$

כעת,

$$\mathbb{E}(Z_n \mathbb{1}_{F_k}) \geq \mathbb{E}(Z_k \mathbb{1}_{F_k})$$

ולכן

$$\lambda \mathbb{P}(F) = \lambda \sum_{k \leq n} \mathbb{P}(F_k) \leq \sum_{k \leq n} \mathbb{E}(Z_n \mathbb{1}_{F_k}) = \mathbb{E}(Z_n \mathbb{1}_F)$$

■

מסקנה 0.2 (אי שוויון קולמוגורוב) יהיו $X_1, X_2, \dots$ משתנים מקריים בלתי תלויים עם $\mathbb{E}(X_n) = 0$, $\sigma_n^2 = \text{Var}(X_n) < \infty$ לכל n . נסמן

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

$$V_n = \sum_{i=1}^n \sigma_n^2 = \text{Var}(S_n)$$

אז לכל $\lambda > 0$ מתקיים

$$\lambda^2 \mathbb{P} \left(\sup_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \lambda \right) \leq V_n$$

נשים לב שאי שוויון זה הוא למעשה הכללה של אי שוויון צ'בישב.

הוכחה: S_n מרטינגל ביחס לפילטרציה הטבעית

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

כעת, כיוון שהפונקציה $\varphi(x) = x^2$ קמורה, נובע כי (S_n^2) תת מרטינגל. כעת המסקנה נובעת מאי שוויון דוב:

$$\lambda^2 \mathbb{P} \left(\sup_{k \leq n} |S_k| \geq \lambda \right) = \lambda^2 \mathbb{P} \left(\sup_{k \leq n} S_k^2 \geq \lambda^2 \right) \leq \mathbb{E}(S_n^2) = \text{Var}(S_n) = V_n$$

■

דוגמא לשימוש באי שוויון דוב, אבל ללא הוכחה: אם (X_n) בלתי תלויים, וכן $X_n \sim N(0, 1)$ ונגדיר

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

נשים לב שמתקיים $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ ואז

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log \log n}} = 1$$

כמעט תמיד.

משפט 0.3 (אי שוויון אדמה-הופדינג) יהי (M_n) מרטינגל ונניח כי $|M_k - M_{k-1}| \leq C_k$ כמעט תמיד. אזי לכל $\lambda > 0$ מתקיים

$$\mathbb{P} \left(\sup_{1 \leq k \leq n} M_k \geq M_0 + \lambda \right) \leq e^{-\frac{\lambda^2}{2 \sum_{k=1}^n C_k^2}}$$

הוכחה: נצטרך טענת עזר:

טענה 0.4 אם Y משתנה מקרי עם $\mathbb{E}(Y) = 0$ וכן $|Y| \leq c$ כמעט תמיד, אזי

$$\mathbb{E}(e^{\theta Y}) \leq \cosh(\theta c) \leq e^{\frac{\theta^2 c^2}{2}}$$

לכל $\theta \in \mathbb{R}$.

את הטענה הזו נוכיח בתרגיל בית. בינתיים, נגדיר $X_k = M_k - M_{k-1}$. אזי

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq k \leq n} M_k \geq M_0 + \lambda\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq k \leq n} e^{\theta(M_k - M_0)} \geq e^{\theta\lambda}\right)$$

כעת, מאי שוויון דוב ומכך שהסדרה $(E^{\theta(M_k - M_0)})$ היא תת מרטינגל אי שלילי (כי אקספוננט זו פונקציה קמורה), מקבלים

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq k \leq n} e^{\theta(M_k - M_0)} \geq e^{\theta\lambda}\right) &\leq \frac{\mathbb{E}(e^{\theta(M_n - M_0)})}{e^{\theta\lambda}} = \frac{1}{e^{\theta\lambda}} \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{\theta X_k}\right) = \\ &= e^{-\theta\lambda} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{\theta X_k} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right)\right) = \\ &= e^{-\theta\lambda} \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n-1} e^{\theta X_k} \mathbb{E}(e^{\theta X_n} \mid \mathcal{F}_{n-1})\right) \leq \\ &\leq e^{-\theta\lambda} e^{\frac{\theta^2 C_n^2}{2}} \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n-1} e^{\theta X_k}\right) \leq \dots \leq \\ &\leq e^{-\theta\lambda} e^{\frac{\theta^2}{2} \sum_{k=1}^n C_k^2} \end{aligned}$$

נסמן כעת

$$c = \sum_{k=1}^n C_k^2$$

ונציב $\theta = \frac{\lambda}{c}$, ונקבל

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1 \leq k \leq n} e^{\theta(M_k - M_0)} \geq e^{\theta\lambda}\right) \leq e^{-\theta\lambda} e^{\frac{\theta^2}{2} \sum_{k=1}^n C_k^2} \leq e^{-\frac{\lambda^2}{c}} \cdot e^{\frac{\lambda^2}{2c^2} c} = e^{-\frac{\lambda^2}{2c}}$$

■

ישים $G(n, p)$ הוא גרף מקרי על n קודקודים כאשר קשת אפשרית מבין $\binom{n}{2}$ האפשרויות נמצאת בגרף בהסתברות p , באופן בלתי תלוי בשאר הקשתות. $\chi(G)$ הוא מספר הצביעה של G , כלומר המספר המינימלי של צבעים שבו אפשר לצבוע את G כך שכל שני קודקודים שיש ביניהם קשת יהיו בעלי צבע שונה.

משפט 0.5 (שמיר ספנסר) יהי $n \geq 1$ ויהי $0 < p < 1$. יהי $G \sim G(n, p)$. נסמן $c = \mathbb{E}(\chi(G))$ אזי

$$\mathbb{P}(|\chi(G) - c| > \lambda\sqrt{n-1}) < 2e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

לכל $\lambda > 0$.

הוכחה: עבור $1 \leq k \leq n$ נגדיר את $\mathcal{F}_k$ להיות הסיגמא אלגברה הנוצרת על ידי המשתנים המקריים המשוייכים לקשתות $\{i, j\}$ עם $1 \leq i, j \leq k$. נגדיר

$$X_k = \mathbb{E}(\chi(G) | \mathcal{F}_k)$$

אזי $X_1, \dots, X_n$ מרטינגל (הסתרה - ראינו דברים כאלה בשיעור). כמו כן, $X_1 = c$, $X_n = \chi(G)$. נשים לב שאם H, H' הם תת גרפים של K_n (הגרף השלם על n קודקודים) שנבדלים בקודקוד אחד בלבד, אזי

$$|\chi(H) - \chi(H')| \leq 1$$

מכאן נקבל

$$|X_k - X_{k-1}| \leq 1$$

כמעט תמיד. מכאן נוכל להפעיל את אי שוויון אזומה-הופדינג:

$$\mathbb{P}(\chi(G) - c \geq \lambda\sqrt{n-1}) = \mathbb{P}(X_n - X_1 \geq \lambda\sqrt{n-1}) \leq e^{-\frac{(\lambda\sqrt{n-1})^2}{2(n-1)}} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

עושים אותו דבר עם מינוסים ומקבלים את האי שוויון עם ערך מוחלט. ■