

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

5 ביוני 2017

1 נוסחאות וואלד (Wald)

משפט 1.1 יהיו $X_1, X_2, \dots$ משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות עם $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. נגדיר $S_n = X_1 + \dots + X_n$, וכן $\mathcal{F}_n$ להיות הפילטרציה הטבעית. יהי T זמן עצירה עם $\mathbb{E}T < \infty$ אזי

$$\mathbb{E}S_T = \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}T$$

וכן אם $\mathbb{E}X_1 = 0, \text{Var}X_1 < \infty$ אזי $\text{Var}(S_T) = \text{Var}(X_1) \mathbb{E}(T)$.

הוכחה: נשים לב שהההליך $S_n - \mu n$ מרטינגל (כאשר $\mu = \mathbb{E}X_1$). ממשפט העצירה עבור זמן העצירה $T \wedge n$, נקבל

$$\mathbb{E}(S_{T \wedge n}) = \mu \mathbb{E}(T \wedge n)$$

ממונוטוניות $\mathbb{E}(T \wedge n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}T$. נותר להראות כי $\mathbb{E}(S_{T \wedge n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}S_T$. נשים לב שמתקיים

$$|S_{T \wedge n}| = \left| \sum_{k=1}^{T \wedge n} X_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |X_k| \mathbb{1}_{\{T \geq k\}}$$

וממשפט ההתכנסות הנשלטת מספיק להראות

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_k| \mathbb{1}_{\{T \geq k\}}) < \infty$$

נחשב:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_k| \mathbb{1}_{\{T \geq k\}}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X_k| \mathbb{1}_{\{T \geq k\}} | \mathcal{F}_{k-1})) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \left(\underbrace{\mathbb{E}(|X_k| | \mathcal{F}_{k-1})}_{\mathbb{E}|X_k| = \mathbb{E}|X_1|} \mathbb{1}_{\{T \geq k\}} \right) = \\ &= \mathbb{E}|X_1| \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(T \geq k) = \mathbb{E}|X_1| \mathbb{E}T < \infty \end{aligned}$$

לגבי החלק השני, ננסח טענת עזר, שאותה נראה בשיעורי הבית:

טענה 1.2 נניח כי (M_n) מרטינגל, T זמן עצירה סופי כמעט תמיד וכן $M_{T \wedge n} \rightarrow M_T$ בנורמת L^1 . אזי

$$\mathbb{E}(M_T | \mathcal{F}_n) = M_n$$

על המאורע $\{T \geq n\}$.

מכאן נוכל להסיק את החלק השני של המשפט.
ראשית נטען שמתקיים

$$\mathbb{E}(M_T^2 \mathbb{1}_{T \geq n}) = \mathbb{E}(M_n^2 \mathbb{1}_{T \geq n}) + \mathbb{E}((M_T - M_n)^2 \mathbb{1}_{T \geq n})$$

נראה זאת. נרשום

$$\begin{aligned} M_T &= M_n + (M_T - M_n) \\ M_T^2 &= M_n^2 + (M_T - M_n)^2 + 2M_n(M_T - M_n) \end{aligned}$$

נרצה להראות אם כן $\mathbb{E}(M_n(M_T - M_n) \mathbb{1}_{T \geq n}) = 0$. מספיק להראות את זה בהינתן $\mathcal{F}_n$, וזה נובע מטענת העזר. כעת, נחזור להוכחת המשפט שלנו. נסמן

$$\sigma^2 = \text{Var} X_1$$

ונגדיר מרטינגל

$$M_n = S_n^2 - \sigma^2 n$$

ממשפט העצירה על זמן העצירה $T \wedge n$ נקבל

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_{T \wedge n}) &= \mathbb{E}M_0 = 0 \\ \mathbb{E}(S_{T \wedge n}^2) &= \sigma^2 \mathbb{E}(T \wedge n) \end{aligned}$$

שוב אגף ימין ישאף ממונוטוניות למה שרצינו. נשאר להראות כי $\mathbb{E}(S_{T \wedge n}^2) \rightarrow \mathbb{E}(S_T^2)$. נשים לב שאלה שונות, שכן התוחלות הן 0 (מהחלק הראשון של המשפט). כעת, נוכל לרשום

$$S_{T \wedge n}^2 = S_T^2 + (S_n^2 - S_T^2) \mathbb{1}_{\{T \geq n\}}$$

ומהמקסנה נובע שמתקיים

$$\mathbb{E}((S_n^2 - S_T^2) \mathbb{1}_{\{T \geq n\}}) \leq 0$$

כלומר

$$\mathbb{E}(S_{T \wedge n}^2) \leq \mathbb{E}(S_T^2)$$

ולכן יחד עם למת פאטו

$$\limsup \mathbb{E}(S_{T \wedge n}^2) \leq \mathbb{E}(S_T^2) \leq \liminf (\mathbb{E}_{T \wedge n}^2)$$

ולכן $\mathbb{E}(S_{T \wedge n}^2) \rightarrow \mathbb{E}(S_T^2)$ כמו שרצינו, כלומר סיימנו. ■

תרגיל (שאלה ממבחן 2016 סמסטר ב' מועד א') תהי (ξ_n) סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים שמתפלגים אחיד על $[-1, 1]$. תהי $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ פונקציה רציפה המקיימת $f(x) \leq \min\{x, 1-x\}$ יהי $x_0 \in [0, 1]$, ונגדיר

$$\begin{aligned} X_0 &= x_0 \\ X_{n+1} &= X_n + \xi_{n+1} f(X_n) \end{aligned}$$

1. הראו כי $X_n \rightarrow X_\infty$ כמעט תמיד ובנורמת L^1 .
2. הוכיחו כי $f(X_\infty) = 0$ כמעט תמיד, כלומר $\mathbb{P}(X_\infty \in f^{-1}(0)) = 1$.
3. נניח כי $f(x) > 0$ לכל $x \in (0, 1)$. מצאו את ההתפלגות של X_∞ .

פתרון 1. ראשית נראה כי X_n מרטינגל ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$. מתקיים

$$\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\xi_{n+1} f(X_n) | \mathcal{F}_n) = f(X_n) \mathbb{E}(\xi_n | \mathcal{F}_n) = 0$$

כעת, X_n גם חסום בגלל התכונה על f , ולכן הא מתכנס כמעט תמיד ובנורמת L^1 אל X_∞ .

2. מתקיים $X_{n+1} - X_n \rightarrow 0$ כמעט תמיד ולכן $\xi_{n+1} f(X_n) \rightarrow 0$ כמעט תמיד. כמו כן, f רציפה $f(X_n) \rightarrow f(X_\infty)$ כמעט תמיד. לכן, מספיק להראות כי $\mathbb{P}(\exists \lim \xi_n) = 0$ (היה מספיק אפילו להראות שהוא מתכנס לאפס בסיכוי 0). זה כמובן נובע מלמת בורל קנטלי השנייה:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\limsup \left\{\xi_n \geq \frac{1}{2}\right\}\right) &= 1 \\ \mathbb{P}\left(\limsup \left\{\xi_n \leq -\frac{1}{2}\right\}\right) &= 1 \end{aligned}$$

ולכן לא יכולה להיות התכנסות (כמעט אף פעם).

3. מההנחה על f ומסעיף ב' נקבל $\mathbb{P}(X_\infty \in \{0, 1\}) = 1$. לכן $X_\infty \sim \text{Ber}(p)$ עבור p מסויים, שכל שנוותר והא לחשבו. כעת

$$x_0 = \mathbb{E}X_0 = \lim_n \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_\infty = \mathbb{P}(X_\infty = 1) = p$$

וסיימנו - $X_\infty \sim \text{Ber}(x_0)$