

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

13 במרץ 2017

1 חזרה

1.1 מרחב הסתברות בדיד

הגדרה 1.1 מרחב הסתברות בדיד הוא זוג $(\Omega, \mathbb{P})$, כאשר Ω קבוצה וכן $\mathbb{P} : P(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ המקיימת:

$$\begin{aligned}\forall A \subseteq \Omega \quad \mathbb{P}(A) &\geq 0 \\ \mathbb{P}(\Omega) &= 1 \\ A \cap B = \emptyset &\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)\end{aligned}$$

הגדרה 1.2 משתנה מקרי הוא פונקציה $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. מגדירים את התוחלת:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mathbb{P}(\{\omega\}) X(\omega) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot \mathbb{P}(X(\omega) = x)$$

שונות:

$$\text{Var} X = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}[x])^2] = \mathbb{E}[x^2] - \mathbb{E}[x]^2$$

1.1.1 התפלגויות בדידות נפוצות

1. אחידה: $X \sim U(\{1, \dots, n\})$, לכל $1 \leq k \leq n$ מתקיים $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$.
2. בינומית: $X \sim \text{Bin}(n, p)$, לכל $1 \leq k \leq n$ מתקיים $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
3. ברנולי: $X \sim \text{Ber}(p)$, מתקיים $\mathbb{P}(X = 0) = 1-p$, $\mathbb{P}(X = 1) = p$.
4. גיאומטרית: $X \sim \text{Geom}(p)$, לכל k טבעי מתקיים $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1} p$.
5. פואסונית: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, לכל k טבעי מתקיים $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.

2 מרחב הסתברות כללי

הגדרה 2.1 מרחב הסתברות הוא שלישייה $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, כאשר $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ סיגמא אלגברה, $\mathbb{P}$ מידה, עם האקסיומות הבאות:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\Omega) &= 1 \\ \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}(A) &\geq 0 \\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)\end{aligned}$$

באקסיומה האחרונה, הקבוצות זרות בזוגות.

הגדרה 2.2 משתנה מקרי ממשי הוא פונקציה מדידה $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. משתנה מקרי כללי הוא פונקציה מדידה $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (S, \Sigma)$ למרחב מידה.

הגדרה 2.3 התוחלת של משתנה מקרי מוגדרת להיות:

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x)$$

נסביר את הסימון בשוויון האחרון: $\mathbb{P}_X$ היא מידה על $\mathbb{R}$, כאשר

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$$

2.1 תזכורת / חידוש מממשיות

משפט 2.4 (משפט ראדון-ניקודים - מקרה פרטי) יהיו μ, ν שתי מידות סופיות על $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ שמקיימות

$$\forall A \subseteq \mathbb{R} \quad \mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$$

מסמנים את זה $\nu \ll \mu$ (קרי ν נשלטת על ידי μ), או ν רציפה בהחלט ביחס למידה μ). אזי קיימת f אינטגרלית כך שמתקיים $\nu = f \cdot \mu$, כלומר

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

f תיקרא פונקציית הצפיפות של ν לפי μ .

2.2 מידות רציפות

הגדרה 2.5 יהי $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ מרחב הסתברות כאשר $\mathbb{P} \ll \text{Leb}$. נסמן את פונקציית הצפיפות $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ זו פונקציה אינטגרלית, וכן

$$\int_{\mathbb{R}} f \, d\text{Leb} = 1$$

יהי X משתנה מקרי. אזי

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} X(y) f(y) \, dy$$

כעת,

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_{X^{-1}(A)} f(x) \, dx$$

f תיקרא PDF (Probability Distribution Function) של $\mathbb{P}$.

2.2.1 התפלגויות רציפות נפוצות

1. אחידה: $X \sim U([a, b])$, $f(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$. נחשב את השונות:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \int_{-1}^1 x^2 f(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 \, dx = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$$

2. אקספוננציאלית: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $f(x) = c_\lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$. נחשב את c_λ :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = c_\lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \, dx = \frac{c_\lambda}{\lambda} \Rightarrow c_\lambda = \lambda$$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$$

נגדיר $Y = \lceil X \rceil$. נחשב את ההתפלגות של Y .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(k-1 < X \leq k) = \int_{k-1}^k \lambda e^{-\lambda x} \, dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{k-1}^k = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = \\ &= e^{-\lambda(k-1)} (1 - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

כלומר $Y \sim \text{Geom}(1 - e^{-\lambda})$.

3. נורמלית: $X \sim N(\mu, \sigma)$, $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. זו התפלגות הפעמון המוכרת (μ) שולט, באיזשהו מובן, ברוחב הפעמון).