

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

17 במאי 2017

1 משפט התכנסות המרטינגל

משפט 1.1 (משפט התכנסות המרטינגל) יהי X על-מרטינגל חסום בנורמת L^1 , משמע

$$\sup_{n \geq 0} \mathbb{E} |X_n| < \infty$$

אזי X מתכנס כמעט תמיד, כלומר

$$\mathbb{P} \left(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n < \infty \right) = 1$$

בנוסף, הגבול אינטגרבילי, כלומר אם נגדיר

$$Y = \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n$$

אזי $\mathbb{E} |Y| < \infty$.

הוכחה: רעיון: יהיו $a < b$ ממשיים. נדום במשתנה $U_N[a, b]$ - כמות הפעמים עד זמן N שבהם X חצה מלהיות קטן מאשר a ללהיות גדול מאשר b . כלומר, $U_N[a, b]$ הוא המקסימום על פני k כך שקיימים $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_k < t_k$ שבהם $X_{s_i} < a$, $X_{t_j} > b$. נוכיח כי $\lim_{N \rightarrow \infty} U_N[a, b]$ סופי כמעט תמיד. נגדיר $Y = C \cdot X$, כאשר C הוא תהליך "קנה כשאתה קטן מאשר a ומכור כשאתה גדול מאשר a ". פורמלית:

$$C_1 = \mathbb{1}_{X_0 < a}$$

$$C_n = \mathbb{1}_{C_{n-1}=1} \cdot \mathbb{1}_{X_{n-1} \leq b} + \mathbb{1}_{C_{n-1}=0} \cdot \mathbb{1}_{X_{n-1} < a}$$

זהו תהליך צפוי וחסום. נובע כי Y על מרטינגל, ממשפט שראינו. בפרט,

$$\mathbb{E} Y_n \leq \mathbb{E} Y_0 = 0$$

לכל n . אבל, מההגדרה

$$Y_n \geq (b - a) U_n[a, b] - (X_n - a)^-$$

כלומר, הרווחנו לפחות $(b - a)$ כפול כמות החציות, והפסדתי לכל היותר את ההפרש בין X_n לבין a . כעת, מתקיים

$$0 \geq \mathbb{E}Y_n \geq (b - a) \mathbb{E}U_n[a, b] - \mathbb{E}\left((X_n - a)^-\right)$$

נסדר זאת ונקבל

$$(b - a) \mathbb{E}U_n[b - a] \leq \mathbb{E}\left((X_n - a)^-\right) \leq \mathbb{E}(|X_n| + |a|) \leq \sup_n \mathbb{E}|X_n| + |a| < \infty$$

ממשפט ההתכנסות המונוטונית נקבל

$$(b - a) \mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} U_n[a, b]\right) < \infty$$

ומכאן שהגבול $\lim U_n[a, b]$ סופי כמעט תמיד. נסיק כעת את משפט התכנסות המרטינגל. ממה שהוכחנו,

$$\mathbb{P}(\forall (Q \ni a < b \in Q) \lim U_n[a, b] < \infty) = 1$$

נובע שמתקיים

$$\mathbb{P}\left(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \in [-\infty, \infty]\right) = 1$$

כי המאורע המשלים הוא

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n \neq \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n$$

ואז ביניהם יש זוג רציונאליים שעלינו לחצות אינסוף פעמים. כדי לסיים, נבחין שמהלמה של פאטו,

$$\mathbb{E}\left(\liminf_n |X_n|\right) \leq \liminf_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$$

מכאן נקבל

$$\mathbb{P}\left(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n < \infty\right) = 1$$

■

דוגמאות כאשר X הילוך מקרי פשוט, אזי X מרטינגל שאינו מתכנס. לעומת זאת, אם נגדיר זמן עצירה $T = \inf \{n \mid X_n = 1\}$, אזי X^T מרטינגל חסום בנורמת L^1 , ולכן מתכנס. מכאן, $T < \infty$ כמעט תמיד. ברור כי

$$X_T = X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n \wedge T}$$

מקיים $\mathbb{P}(X_\infty = 1) = 1$. נבחין כי $\mathbb{E}X_{n \wedge T} = \mathbb{E}X_0 = 0$ אך $\mathbb{E}X_T = 1$ כלומר אין התכנסות בנורמת L^1 .

מסקנה 1.2 על-מרטינגל אי שלילי מתכנס כמעט תמיד לגבול סופי.

הוכחה:

$$\mathbb{E}|X_n| = \mathbb{E}X_n \leq \mathbb{E}X_0$$

■

2 מרטינגלים חסומים בנורמת L^2

הגדרה 2.1 מרטינגל הוא חסום בנורמה L^2 אם

$$\sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$$

טענה 2.2 (משפט פיתגורס) יהי X מרטינגל חסום בנורמת L^2 . מתקיים

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(X_0^2) + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((X_k - X_{k-1})^2)$$

שוויון זה נובע מכך שלכל $k < l$ מתקיים

$$\mathbb{E}((X_k - X_{k-1})(X_l - X_{l-1})) = 0$$

הוכחה: נראה קודם שלכל $a < b \leq c < d$ מתקיים

$$\mathbb{E}((X_b - X_a)(X_d - X_c)) = 0$$

אכן:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X_b - X_a)(X_d - X_c)) &= \mathbb{E}(\mathbb{E}((X_b - X_a)(X_d - X_c) \mid \mathcal{F}_c)) = \\ &= \mathbb{E}((X_b - X_a) \mathbb{E}(X_d - X_c \mid \mathcal{F}_c)) = \\ &= \mathbb{E}((X_b - X_a)(\mathbb{E}(X_d \mid \mathcal{F}_c) - X_c)) = \\ &= \mathbb{E}((X_b - X_a)(X_c - X_c)) = 0 \end{aligned}$$

כעת, נרשום

$$X_n = X_0 + \sum_{k=1}^n (X_k - X_{k-1})$$

ואז

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \mathbb{E}(X_0^2) + \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left((X_k - X_{k-1})^2\right) + 2\mathbb{E}\left(X_0 \left(\sum_{k=1}^n X_k - X_{k-1}\right)\right)$$

■ הגורם האחרון מתאפס - אפשר להוכיח על ידי התניה בסיגמא אלגברה $\mathcal{F}_0$.

משפט 2.3 (התכנסות מרטינגלים חסומים בנורמת L^2) יהי X מרטינגל חסום בנורמת L^2 . אזי X מתכנס כמעט תמיד ובנורמת L^2 .

הוכחה: חסימות בנורמת L^2 גוררת חסימות בנורמת L^1 . לכן X מתכנס כמעט תמיד. נסמן

$$X_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$$

כעת, לכל $m > n$, מתקיים

$$\mathbb{E}\left((X_m - X_n)^2\right) = \sum_{k=n+1}^m \mathbb{E}\left((X_k - X_{k-1})^2\right)$$

מהטענה הקודמת (למשל כי $(X_{n+k} - X_n)_{k=0}^\infty$ מרטינגל שחסום בנורמת L^2). מהלמה של פאטו, בלקיחת $m \rightarrow \infty$:

$$\mathbb{E}\left((X_\infty - X_n)^2\right) \leq \sum_{k=n+1}^\infty \mathbb{E}\left((X_k - X_{k-1})^2\right)$$

לכן תהיה התכנסות בנורמת L^2 כאשר

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbb{E}\left((X_k - X_{k-1})^2\right) < \infty$$

זה אכן קורה כי

$$\mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_0^2) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left((X_k - X_{k-1})^2\right)$$

■ וכי X חסום בנורמת L^2 .

נדגיש נקודה שעלתה במהלך ההוכחה. ראינו כי

$$\mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_0^2) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left((X_k - X_{k-1})^2\right)$$

ולכן נובע שהמרטינגל חסום בנורמת L^2 אם ורק אם

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left((X_k - X_{k-1})^2\right) < \infty$$

בנוסף, נובע ממה שעשינו שאם X חסום בנורמת L^2 אזי לכל $n \geq 0$ מתקיים

$$\mathbb{E}\left((X_{\infty} - X_n)^2\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{E}\left((X_k - X_{k-1})^2\right)$$

2.1 סכומים של משתנים מקריים בלתי תלויים

שאלה ששאלנו בתחילת הקורס. יהיו $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ סימנים מקריים - כלומר הם בלתי תלויים וכן

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2}$$

האם

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{1}{n^{\alpha}} < \infty$$

ממשפט 0-1 של קולמוגורוב, ההתכנסות היא בהסתברות אחד או לכל α נתון. עבור $\alpha > 1$, הטור מתכנס בהחלט, ולכן מתכנס. עבור $\alpha \leq 0$ ברור שזה לא יכול להתכנס. נותרה השאלה עבור $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$.

תשובה אם ורק אם $\alpha > \frac{1}{2}$.

משפט 2.4 יהיו (D_k) בלתי תלויים ובעלי תוחלת 0 ושונות סופית.

1. אם $\sum \mathbb{E}(D_k^2) < \infty$ אזי $\sum D_k$ מתכנס כמעט תמיד.

2. נניח כי (D_k) חסומים, כלומר קיים K כך שלכל k מתקיים $\mathbb{P}(D_k < K) = 1$. אזי אם $\sum \mathbb{E}(D_k^2) < \infty$ מתכנס כמעט תמיד $\sum D_k$.

הוכחה:

1. נגדיר מרטינגל

$$X_0 = 0$$

$$X_n = \sum_{k=1}^n D_k$$

ביחס לפילטרציה $\mathcal{F}_k = \sigma(D_1, \dots, D_k)$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ אז

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(D_k^2)$$

מהנתון, נקבל כי X חסום בנורמת L^2 , כי הטור באגף ימין מתכנס. לכן X מתכנס כמעט תמיד ובנורמת L^2 , מהמשפט הקודם.

2. נגדיר תהליך חדש:

$$Y_n = \left(\sum_{k=1}^n D_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(D_k^2)$$

אזי Y מרטינגל. אכן,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}\left((X_{n-1} + D_n)^2 | \mathcal{F}_{n-1}\right) = X_{n-1}^2 + 2\mathbb{E}(X_{n-1}D_n | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(D_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) = \\ &= X_{n-1}^2 + \mathbb{E}(D_n^2) \end{aligned}$$

ומכאן

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}) - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(D_k^2) = \\ &= X_{n-1}^2 + \mathbb{E}(D_n^2) - \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(D_k^2) = Y_{n-1}^2 \end{aligned}$$

נבחר סף $c > 0$, ונגדיר זמן עצירה $T = \inf\{n \mid |X_n| > c\}$. נסתכל בתהליך העצור, Y^T . זהו מרטינגל, ולכן, לכל n ,

$$0 = \mathbb{E}Y_n^T = \mathbb{E}(Y_{n \wedge T}) = \mathbb{E}(X_{n \wedge T}^2) - \sum_{k=1}^{n \wedge T} \mathbb{E}(D_k^2)$$

כלומר קיבלנו כי

$$\sum_{k=1}^{n \wedge T} \mathbb{E}(D_k^2) = \mathbb{E}(X_{n \wedge T}^2) \leq (c + K)^2$$

מהנתון, X מכתנס, ולכן נובע כי $\sup |X_n|$ סופי כמעט תמיד. לכן קיים c כך שמתקיים

$$\mathbb{P}\left(\sup_n |X_n| > c\right) < 1$$

נשתמש באותו c , ונבחין שעל המאורע $\sup |X_n| \leq c$ מתקיים $T = \infty$. כלומר,

$$\mathbb{P}(T = \infty) > 0$$

ממה שראינו, ומהתכנסות מונוטונית, נקבל

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^T \mathbb{E} (D_k^2) \right) \leq (c + K)^2$$

נסיק מכאן כי

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} (D_k^2) < \infty$$

■

הערה 2.5 ראינו שמספיק בסעיף השני לדרוש

$$\mathbb{P} \left(\sup_n \left| \sum_{k=1}^n D_k \right| < \infty \right) > 0$$

ואז מהסעיף הראשון נקבל כי שהטור מתכנס למעשה.

קיבלנו דיכוטומיה: עבור טור של משתנים מקריים חסומים ובלתי תלויים בעלי תוחלת אפס, מתקיים אחד מהשניים:

1. הטור מתכנס כמעט תמיד וסכום השונויות סופי.

$$2. \mathbb{P} (\sup_n |\sum_{k=1}^n D_k| < \infty) = 0$$

אפשר לחזק את 2 להיות

$$\mathbb{P} \left(\limsup \sum_{k=1}^n D_k = -\liminf \sum_{k=1}^n D_k = \infty \right) = 1$$

2.2 משתנים שאינם בעלי תוחלת 0

נרצה להסיר מהמשפט האחרון את ההנחה כי התוחלות 0. בשיעור הבא.