

הסתברות למתמטיקאים

© ארזים

10 במאי 2017

1 תורת המרטינגלים

בשיעור האחרון הגדרנו מרטינגלים, תת מרטינגלים ועל מרטינגלים. היום נמשיך לפתח את המושגים ולהבין אותם.

1.1 תהליך צפוי

הגדרה 1.1 תהליך $(C_n)_{n=1}^\infty$ (כאן $n \geq 1$) נקרא צפוי אם C_n מדיד ביחס לסגמא אלגברה $\mathcal{F}_{n-1}$ לכל n . עבור תהליך $(X_n)_{n=0}^\infty$ נגדיר

$$Y_n = \sum_{k=1}^n C_k (X_k - X_{k-1})$$
$$Y_0 = 0$$

פירוש אינטואיטיבי: X_n הוא ערך של מניה ביום n . C_n הוא כמות האחזקה שלנו במניה ביום n . Y_n הוא כמות הרווח או ההפסד המצטבר עד יום n . נסמן $Y = C \cdot X$ (טרנספורם המרטינגל של X על ידי C).

הערה 1.2 ישנה גם גרסה של $C \cdot X$ כאשר X בזמן רציף, כלומר $X = (X_t)_{t \in [0, \infty)}$ והיא

$$Y_s = \int_0^s C_t dX_t$$

וזהו אינטגרל סטוכסטי (אינטגרל איטו).

כעת, נראה שבמובן הנכון, אי אפשר לנצח את השיטה.

משפט 1.3 1. יהי X על (באופן אנלוגי תת) מרטינגל ויהי C תהליך צפוי. נניח כי $C_n (X_n - X_{n-1})$ אינטגרלי לכל $n \geq 1$. אזי, אם $C_n \geq 0$ לכל n אזי $C \cdot X$ על (תת) מרטינגל.

2. יהי X מרטינגל ויהי C תהליך צפוי. נניח כי לכל $C_n (X_n - X_{n-1})$ אינטגרלי לכל $n \geq 1$. אזי $C \cdot X$ מרטינגל.

הוכחה: נסמן $Y = C \cdot X$. ברור שזהו תהליך מותאם. מהנתון, $\mathbb{E}|Y_n| < \infty$ לכל n . כעת, נבדוק את התנאי:

$$\mathbb{E}(Y_n - Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(C_n(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1})$$

כעת, C_n מדיד ביחס לסיגמא אלגברה $\mathcal{F}_{n-1}$ כי C צפוי. לכן

$$\mathbb{E}(Y_n - Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = \mathbb{E}(C_n(X_n - X_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) = C_n \mathbb{E}(X_n - X_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1})$$

אם X על מרטינגל אזי הגורם הימני שלילי כמעט תמיד, ואז אם $C_n \geq 0$ אזי קיבלנו $\mathbb{E}(Y_n - Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) \leq 0$ כמעט תמיד כמו שרצינו. אם X מרטינגל נקבל שהגורף הימני הוא 0, ולכן גם $\mathbb{E}(Y_n - Y_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = 0$. לכן הוכחנו את שני הסעיפים. ■

1.2 זמני עצירה

הערה 1.4 מעתה נוסיף לפילטרציה שלנו $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$ גם את $\mathcal{F}_{\infty}$ על ידי

$$\mathcal{F}_{\infty} = \sigma\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$$

הגדרה 1.5 זמן עצירה הוא משתנה מקרי T המקבל ערכים מתוך $\{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ המקיים שלכל $n \geq 0$ מתקיים

$$\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

או באופן שקול, לכל $n \geq 0$

$$\{T = n\} \in \mathcal{F}_n$$

השקילות נובעת כי

$$\{T = n\} = \{T \leq n\} \setminus \{T \leq n-1\}$$

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \{T = k\}$$

דוגמה יהיו $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ בלתי תלויים שווי התפלגות עם $\mathbb{P}(D_n = 1) = \mathbb{P}(D_n = -1) = \frac{1}{2}$. נגדיר

$$X_n = \sum_{k=1}^n D_k$$

כאשר $X_0 = 0$. ניקח

$$\mathcal{F}_n = \sigma(D_0, \dots, D_n)$$

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

זמני עצירה אפשריים:

- $T = n_0$ עבור n_0 קבוע.
- $T = \inf \{n \mid X_n = 1\}$ כמובן המאורע $\{T = k\}$ אומר שלכל $m < k$ מתקיים $X_m < 1$, וכן $X_k = 1$ - ומתוך סדרת ההפרשים $D_1, \dots, D_n$ אפשר לדעת האם זה מתקיים. לכן $\{T = k\} \in \mathcal{F}_k$. כרגיל, $\inf \{\emptyset\} = \infty$. נבחין כי $\{T = \infty\} \in \mathcal{F}_\infty$.

דברים שאינם זמני עצירה:

- $T = \inf \{n \mid D_{n+1} = -1\}$
- T הוא אותו k שעבורו

$$X_k = \max_{0 \leq j \leq 100} X_j$$

הגדרה 1.6 יהי X על מרטינגל, ויהי T זמן עצירה. נגדיר את X שנעצר בזמן T על ידי

$$X^T = (X_n^T)_{n=0}^\infty$$

כאשר

$$X_n^T = X_{\min(n, T)} := X_{n \wedge T}$$

משפט 1.7 X^T גם הוא על מרטינגל. בפרט,

$$\mathbb{E}X_{T \wedge n} \leq \mathbb{E}X_0$$

הוכחה: נגדיר $C_n = \mathbb{1}_{n \leq T}$. נטען כי זה תהליך צפוי - כלומר צריך לבדוק כי

$$\{n \leq T\} \in \mathcal{F}_{n-1}$$

זה נכון כי

$$\{n \leq T\} = \{n < T\}^c = \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} \{T = k\} \right)^c \in \mathcal{F}_{n-1}$$

כעת נבדוק כי $X^T = C \cdot X$,אכן,

$$\begin{aligned}(C \cdot X)_n &= \sum_{k=1}^n C_k (X_k - X_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{k \leq T} (X_k - X_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^{\min(n,T)} X_k - X_{k-1} = X_{T \wedge n} = X_n^T\end{aligned}$$

■ ואז המשפט נובע מהמשפט הקודם על $C \cdot X$.

הערה 1.8 המשפט נכון לתת מרטינגל או למרטינגל עם ההגדרה האנלוגית. במקרה של מרטינגל נובע כי

$$\mathbb{E}X_{T \wedge n} = \mathbb{E}X_0$$

בדוגמה של ההילוך המקרי, כאשר $T = \inf \{n \mid X_n = 1\}$ ידוע (ונוכיח בהמשך) כי $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$, נבחין בעובדה מפתיעה. לכל n מתקיים $\mathbb{E}(X_{n \wedge T}) = 0$ מהמשפט, אבל $\mathbb{E}X_T = 1$ נזכר כי

$$X_T = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n \wedge T}$$

ועל כן בפרט אין כאן התכנסות נשלטת או מונוטונית. נבחן מספר תנאים המספיקים לכך שמתקיים $\mathbb{E}X_T \leq \mathbb{E}X_0$ עבור על מרטינגל.

משפט 1.9 (משפט העצירה האפשרית של דוב) יהי X על מרטינגל ויהי T זמן עצירה. אזי X_T אינטגרבילי ומקיים $\mathbb{E}X_T \leq \mathbb{E}(X_0)$ במקרים הבאים:

1. T חסום - קיים $N < \infty$ עבורו $\mathbb{P}(T \leq N) = 1$.
2. X חסום - קיים $K < \infty$ עבורו לכל n מתקיים $\mathbb{P}(|X_n| \leq K) = 1$, וכן $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.
3. ההפרשים של X חסומים - קיים $K < \infty$ עבורו לכל n מתקיים $\mathbb{P}(|X_n - X_{n-1}| \leq K) = 1$ וכן T אינטגרבילי.

הוכחה: בכל המקרים, $T < \infty$ כמעט תמיד. לכן

$$X_T = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{n \wedge T}$$

ומהמשפט הקודם $\mathbb{E}X_{n \wedge T} \leq \mathbb{E}X_0$.

1. $X_T = X_{N \wedge T}$, ולכן סיימנו.

2. נובע ממשפט ההתכנסות החסומה (או הנשלטת).

3. נשתמש בהתכנסות נשלטת:

$$|X_{n \wedge T}| = \left| \sum_{k=1}^{n \wedge T} X_k - X_{k-1} \right| \leq \sum_{k=1}^{n \wedge T} |X_k - X_{k-1}| \leq K (n \wedge T) \leq KT$$

המשתנה KT אינטגרבי, ולכן סיימנו.

■

יש גם מקרה רביעי - אם העל מרטינגל אי שלילי וזמן עציה סופי כמעט תמיד. זו מסקנה מיידית מלמת פאטו.

דוגמא ננתח עוד את דוגמת ההילוך המקרי. נמצא את ההתפלגות של $T = \inf \{n \mid X_n = 1\}$. כיוון שהמשתנה X_n הוא סכום של אותם D_n שהם הטלות מטבע, והם בלתי תלויים, טבעי להסתכל על

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\theta X_n}) &= \mathbb{E}(e^{\theta(D_1 + \dots + D_n)}) = \mathbb{E}(e^{\theta D_1} \dots e^{\theta D_n}) = \mathbb{E}(e^{\theta D_1})^n = \\ &= \left(\frac{1}{2}e^\theta + \frac{1}{2}e^{-\theta} \right)^n = \cosh^n \theta \end{aligned}$$

נגדיר כעת

$$M_n = \frac{e^{\theta X_n}}{\cosh^n \theta} = \prod_{k=1}^n \frac{e^{\theta D_k}}{\cosh \theta}$$

וזהו מרטינגל אי שלילי - אכן, M מותאם, M_n אינטגרבי, וכן

$$\mathbb{E}(M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}) = M_{n-1} \cdot \mathbb{E}\left(\frac{e^{\theta D_n}}{\cosh \theta} \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = M_{n-1} \mathbb{E}\left(\frac{e^{\theta D_n}}{\cosh \theta}\right) = M_{n-1}$$

נתבונן במרטינגל העצור $M^T = (M_{n \wedge T})$. מהמשפט,

$$\mathbb{E}(M_{n \wedge T}) = \mathbb{E}M_0 = 1$$

לכל $n \geq 0$ מצד שני,

$$\mathbb{E}(M_{n \wedge T}) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{\theta X_{n \wedge T}}}{(\cosh \theta)^{n \wedge T}}\right)$$

נקבע $\theta > 0$. לא ברור אם $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ (נוכיח שכן). נבחין שלכל n מתקיים

$$M_{n \wedge t} = \frac{e^{\theta X_{n \wedge T}}}{(\cosh \theta)^{n \wedge T}} \leq \frac{e^\theta}{(\cosh \theta)^{n \wedge T}} \leq e^\theta$$

נגדיר, באופן מלאכותי, $M_\infty = 0$. כעת, כמעט תמיד,

$$M_{n \wedge T} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M_T$$

מהתכנסות חסומה, $\mathbb{E} M_{n \wedge T} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} M_T$, ולכן

$$\mathbb{E} M_T = 1$$

כאשר

$$M_T = \begin{cases} M_T & T < \infty \\ 0 & T = \infty \end{cases}$$

כעת,

$$M_T = \frac{e^\theta}{(\cosh \theta)^T} \leq e^\theta$$

ושוויון זה נכון גם עבור $T = \infty$. ניקח $\theta \downarrow 0$ ונבחין כי

$$\lim_{\theta \downarrow 0} M_T = \begin{cases} 1 & T < \infty \\ 0 & T = \infty \end{cases}$$

לכן, היות וראינו $\mathbb{E} M_T = 1$, נקבל $\mathbb{E} (\mathbb{1}_{T < \infty}) = 1$ כלומר $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$. כעת, נסיק עוד מידה מהשוויון $\mathbb{E} M_T = 1$. השוויון אומר שלכל $\theta > 0$ מתקיים

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{(\cosh \theta)^T} \right) = e^{-\theta} = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \sqrt{1 - \alpha^2} \right)$$

$\underbrace{\alpha^T = e^{T \ln \alpha}}$

כאשר $\alpha = \frac{1}{\cosh \theta} = \frac{2}{e^\theta + e^{-\theta}}$. לכל $0 < \alpha < 1$ קיבלנו כי

$$\mathbb{E} (\alpha^T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = k) \alpha^k = \frac{1}{\alpha} \left(1 - \sqrt{1 - \alpha^2} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \binom{\frac{1}{2}}{m} \alpha^{2m-1}$$

כאשר עבור $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\binom{\theta}{n} = \frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1)}{n!}$$

המקדם הבינומי הממשי. נסיק כי עבור $m \geq 1$ מתקיים

$$\mathbb{P}(T = 2m - 1) = (-1)^{m+1} \binom{\frac{1}{2}}{m}$$

$$\mathbb{P}(T = 2m) = 0$$

2 משפט התכנסות המרטינגל

משפט 2.1 (משפט התכנסות המרטינגל) יהי X על מרטינגל חסום בנורמת L^1 - כלומר

$$\sup_n \mathbb{E} |X_n| < \infty$$

אזי

$$\mathbb{P} \left(\exists \lim_{n \rightarrow \infty} X_n < \infty \right) = 1$$

דוגמא נחזור להילוך המקרי X . זה בעצמו מרטינגל, אבל X לא חסום בנורמת L^1 . נזכר כי $T = \inf \{n \mid X_n = 1\}$. גם $X_{n \wedge T}$ הוא מרטינגל. ידוע לנו כי $\mathbb{E}(X_{n \wedge T}) = 0$, אבל $X_{n \wedge T} \leq 1$ כמעט תמיד. מכאן,

$$\mathbb{E} |X_{n \wedge T}| \leq 2$$

ועל כן $X_{n \wedge T}$ חסום בנורמת L^1 , ולכן מתכנס כמעט תמיד. כיוון שהוא מקבל ערכים שלמים בלבד, נובע שהוא קבוע החל ממקום מסוים, כמעט תמיד. כלומר, $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.